DERIVATE SECONDE

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ D aperto

Esistano $\partial_{x_1} f, \dots, \partial_{x_n} f$ in ogni punto.

Si possono considerare le funzioni

$$x \longmapsto \partial_{x_i} f(x)$$

ES. $f(x,y) = x^2 + xy$ $\partial_x f(x,y) = 2x + y$

$$(x,y) \longmapsto 2x+y = \partial_x f(x,y)$$

Se la funzione $\begin{aligned} D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \partial_{x_i} f(x) \end{aligned}$ ha

derivata parziale rispetto a x_j si pone

$$\boxed{\partial^2_{x_j x_i} f(x) := \partial_{x_j} \left(\partial_{x_i} f \right)(x)}$$

ES. $f(x,y) = x^2 + xy$ $\partial^2_{y,x} f(x,y)$

$\partial_x f(x,y) = 2x + y$ | $\partial_y f(x,y) = 0 + x$

$\underbrace{\partial_y (\partial_x f)(x,y)}_{\partial^2_{y,x} f} = \partial_y (2x+y) = \boxed{1}$ | $\underbrace{\partial_x (\partial_y f)(x,y)}_{\partial^2_{x,y} f} = \boxed{1}$

$=$

Teorema (Schwarz). Se f è di classe $\mathcal{C}^2$ (cioè

Teorema (Schwarz). Se f è di classe $\mathcal{C}^2$ (cioè $\partial^2_{x_i,x_j} f$ esistono continue in D) allora

$$\partial^2_{x_i,x_j} f(x) = \partial^2_{x_j,x_i} f(x).$$

Matrice hessiana di f è

$$\text{Hess} f(x) = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1 x_1} f(x), & \dots & \partial^2_{x_1 x_n} f(x) \\ \partial^2_{x_2 x_1} f(x) & \dots & \partial^2_{x_2 x_n} f(x) \\ \vdots & & \\ \partial^2_{x_n x_1} f(x) & \dots & \partial^2_{x_n x_n} f(x) \end{pmatrix}$$

Riga i colonna j: $\partial^2_{x_i x_j} f(x)$.

Es: $f(x,y) = x^2 + xy$

$\partial_x f(x,y) = 2x + y$

$\partial_y f(x,y) = x$

$\partial^2_{x,x} f(x,y) = \partial_x (2x+y) = 2$

$\partial^2_{y,y} f(x,y) = \partial_y (x) = 0$

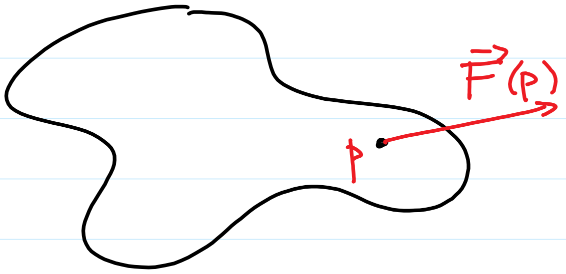
$\partial^2_{x,y} f(x,y) = \partial_x (\partial_y f)(x,y) = 1$

$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

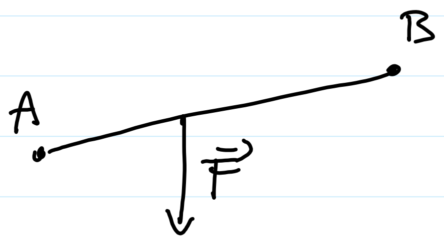
INTEGRALI CURVILINEI DI CAMPI VETTORIALI

Un campo vettoriale su un sottoinsieme D di $\mathbb{R}^n$ è una funzione

$$\vec{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

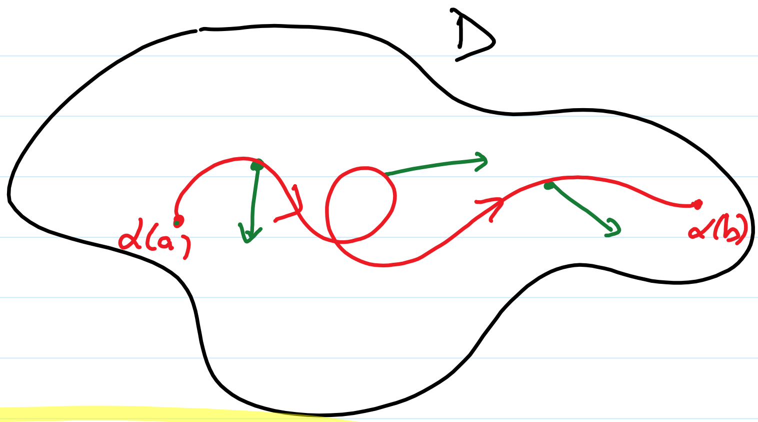


"Lavoro di una forza $\vec{F}$ lungo un segmento $[A,B]$":



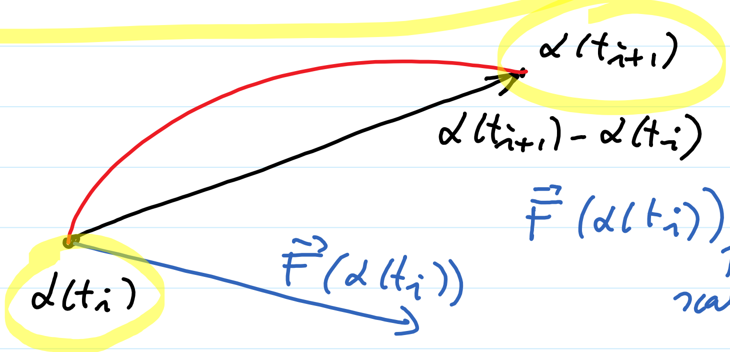
$\vec{F} \cdot \vec{AB}$

$\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ curva (derivabile)
$\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^n$ D aperto contenente il sostegno di α.



$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = b$$

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = b$



$\vec{F}(\alpha(t_i)) \bullet (\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i))$
↑
scalare

Lavoro di $\vec{F}$ nella poligonale: $\vec{F}(\alpha(a)) \cdot (\alpha(t_1) - \alpha(a)) + \dots + \vec{F}(\alpha(t_m)) \cdot (\alpha(b) - \alpha(t_m))$.

$$\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i) \approx \alpha'(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

$$\text{Lavoro} \approx \vec{F}(\alpha(a)) \bullet \alpha'(a)(t_1 - a) + \dots + \vec{F}(\alpha(t_m)) \bullet \alpha'(t_m)(b - t_m).$$

SOMMA di Riemann di $\vec{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)$

$$\xrightarrow[t_{i+1} - t_i \to 0]{} \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)\, dt$$

DEF. $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua e C^1;
$\vec{F} : \alpha([a,b]) \to \mathbb{R}^n$ continua.

L'integrale curvilineo del campo $\vec{F}$ su α è

$$\int_\alpha \vec{F} \bullet d\alpha := \boxed{\int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)\, dt}$$

$\vec{F} = (F_1, \dots, F_n) \qquad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$\boxed{\int_\alpha \vec{F} \bullet d\alpha} = \int_a^b F_1(\alpha(t))\alpha_1'(t) + \dots + F_n(\alpha(t))\alpha_n'(t)\, dt$$

$$:= \boxed{\int_\alpha F_1(x)\, dx_1 + \dots + F_n(x)\, dx_n}$$

ESEMPIO. $\vec{F}(x,y) = (\cos x,\ e^{xy})$

$$\alpha(t) = (t^2, 2t) \qquad t \in [0,1]$$

$$\int_\alpha \vec{F} \cdot d\alpha = \int_0^1 \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} \cos t^2 \\ e^{t^2(2t)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix} dt$$

$$\int_\alpha \cos x\, dx + e^{xy}\, dy = \int_0^1 \cos(t^2)(t^2)' + e^{t^2(2t)}(2t)'\, dt$$

! Non confondere $\int_\alpha \underbrace{f(x)}_{\text{FUNZIONE SCALARE}} ds$ con $\int_\alpha \underbrace{\vec{F}}_{\text{CAMPO VETTORIALE}} \cdot d\alpha$

$$\int_\alpha f(x)\, ds = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\|\, dt \qquad \int_a^b \underbrace{\vec{F}(\alpha(t)) \cdot \underbrace{\alpha'(t)}_{\in \mathbb{R}^n}}_{\text{scalare}}\, dt$$

DEF. $\vec{F}: \underbrace{D}_{\text{aperto}} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ si dice CONSERVATIVO se esiste $U: D \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ tale che

$$\boxed{\nabla U = \vec{F}}$$

U: una primitiva di $\vec{F}$

ESEMPIO. $\vec{F}(x,y) = (x,y)$

$\vec{F}$ è conservativo perché $\nabla(\underbrace{\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2}_{\text{primitiva}}) = (x,y)$.

Cercare $U: \nabla U = \vec{F}$ significa risolvere

$$\begin{cases} \partial_{x_1} U = F_1 \\ \vdots \\ \partial_{x_n} U = F_n \end{cases}$$

OSS: Risolvere $\partial_{x_1} U(x_1, .., x_n) = f(x_1, .., x_n)$ su un rettangolo

a) $f = 0$; $U(x_1, .., x_n) = \varphi(x_2, .., x_n)$

b) $f \neq 0$ ES $f(x,y) = 3xy$ $\partial_x U(x,y) = 3xy$?

Ad esempio $\frac{3}{2}x^2 y$

In generale si prende una primitiva F_1 di $f(x_1,..,x_n)$ rispetto a x_1 $\left[F_1(x_1,..,x_n) = \int_{a_1}^{x_1} f(t,x_2,..,x_n)\,dt \right]$

Le soluz. di $\partial_{x_1} U = f$ sono $F_1(x_1,..,x_n) + \varphi(x_2,..,x_n)$ → qualunque.

IL METODO DELLE DERIVATE PARZIALI

Volendo risolvere $\nabla U = \vec{G} \iff \begin{cases} \partial_{x_1} U = G_1 \ (1) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} U = G_n \ (n) \end{cases}$

si risolve come sopra una delle equazioni, ad es. la prima $\rightsquigarrow U(x_1,..,x_n) = F_1(x_1,..,x_n) + \varphi(x_2,..,x_n)$.
Si utilizza la seconda equazione (con U scritta come prima) e si trovano condizioni su φ, eccetera...

Esempio. $\vec{F}(x,y) = (x,y)$. Risolviamo $\nabla U = \vec{F}$:

$$\begin{cases} \partial_x U = x \ (1) \\ \partial_y U = y \ (2) \end{cases} \longrightarrow \boxed{U(x,y) = \tfrac{1}{2}x^2 + \varphi(y)}$$

$$(2): \partial_y\left(\tfrac{1}{2}x^2 + \varphi(y)\right) = y$$

$$\varphi'(y) = y \longrightarrow \boxed{\varphi(y) = \tfrac{1}{2}y^2 + c} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow U(x,y) = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Esempio $\vec{F}(x,y) = (2y, x)$

Vogliamo trovare $U(x,y)$: $\begin{cases} \partial_x U(x,y) = 2y \to U(x,y) = 2xy + \varphi(y) \\ \partial_y U(x,y) = x \to 2x + \varphi'(y) = x \end{cases}$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = -x \quad \forall x,y$$

IMPOSSIBILE

$$\Rightarrow \varphi'(y) = -x \quad \forall x,y$$

IMPOSSIBILE

$\Rightarrow \vec{F}$ non è conservativo.

Esempio $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} + y^2 \right)$ Definito in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\begin{cases} \partial_x U(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \rightsquigarrow \boxed{U(x,y) = \frac{1}{2}\lg(x^2+y^2)+\varphi(y)} \\ \partial_y U(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + y^2 \rightsquigarrow \partial_y\left(\frac{1}{2}\lg(x^2+y^2)+\varphi(y)\right) = \frac{y}{x^2+y^2} + y^2 \end{cases}$$

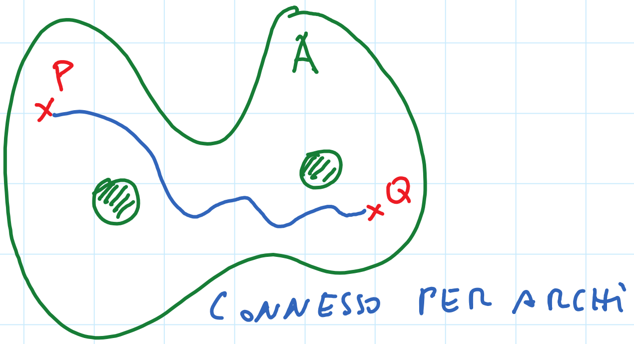
$$\cancel{\frac{y}{x^2+y^2}} + \varphi'(y) = \cancel{\frac{y}{x^2+y^2}} + y^2$$

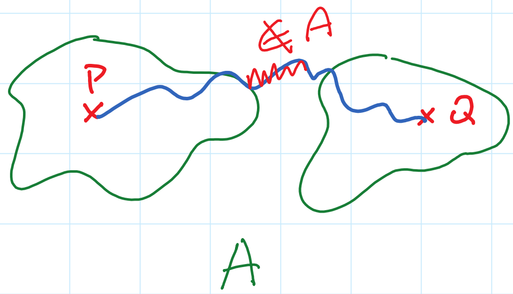
$$\varphi'(y) = y^2 \Rightarrow \boxed{\varphi(y) = \frac{1}{3}y^3 + c}$$

$$\Rightarrow U(x,y) = \frac{1}{2}\lg(x^2+y^2) + \frac{y^3}{3} + c.$$

OSS. Aperti connessi per archi e primitive

Un insieme aperto A di $\mathbb{R}^n$ si dice CONNESSO PER ARCHI se $\forall P, Q \in A$ esiste una curva $\alpha : [a,b] \longrightarrow A : \begin{cases} \alpha(a) = P \\ \alpha(b) = Q \end{cases}$





Se A è connesso per archi, $U \in \mathcal{C}^1(A)$ $\nabla U = 0$ in A $\Leftrightarrow U =$ costante. Quindi in A due primitive di uno stesso campo differiscono per una costante.

[$\nabla U_1 = \vec{F} = \nabla U_2 \Rightarrow \nabla(U_2 - U_1) = 0 \Rightarrow U_2 - U_1 =$ costante]

ES. Campo gravitazionale generato da una massa puntuale

$$\vec{F}(x) = \frac{K}{\|x\|^2} \underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\text{Versore di NORMA } 1} \qquad x \neq 0$$

Candidata primitiva: $U(x) = g(\|x\|)$ $\quad g \in \mathcal{C}^1$.

Troviamo g: $\nabla U(x) = \frac{K}{\|x\|^2} \frac{x}{\|x\|}$?

Si ha $\nabla(g(\|x\|)) = g'(\|x\|)\nabla\|x\| = g'(\|x\|)\frac{x}{\|x\|}$ $\quad (x \neq 0)$

Problema: trovare $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$: $g'(t) = \frac{K}{t^2}$ $\quad \forall t > 0$

Basta scegliere $\boxed{g(t) = -\frac{K}{t}}$

$\Rightarrow$ Una primitiva di $\vec{F}(x)$ è $-\frac{K}{\|x\|}$

I CAMPI RADIALI SONO CONSERVATIVI

ES. Se $\vec{F}(x)$ è radiale $\vec{F}(x) = \underbrace{\varphi}_{\text{continua}}(\|x\|)\frac{x}{\|x\|}$ $\quad x \neq 0$

allora $\vec{F}$ è conservativo;

con il metodo precedente una primitiva è $U(x) = g(\|x\|)$

dove g è una primitiva di φ

Es. Primitiva di $-\|x\|^3 \frac{x}{\|x\|} \rightsquigarrow U(x) = -\frac{1}{4}\|x\|^4$