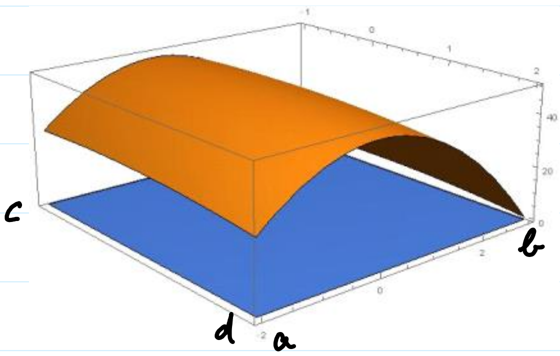
INTEGRALI DOPPI.

Motivazione: calcolo di Volumi.

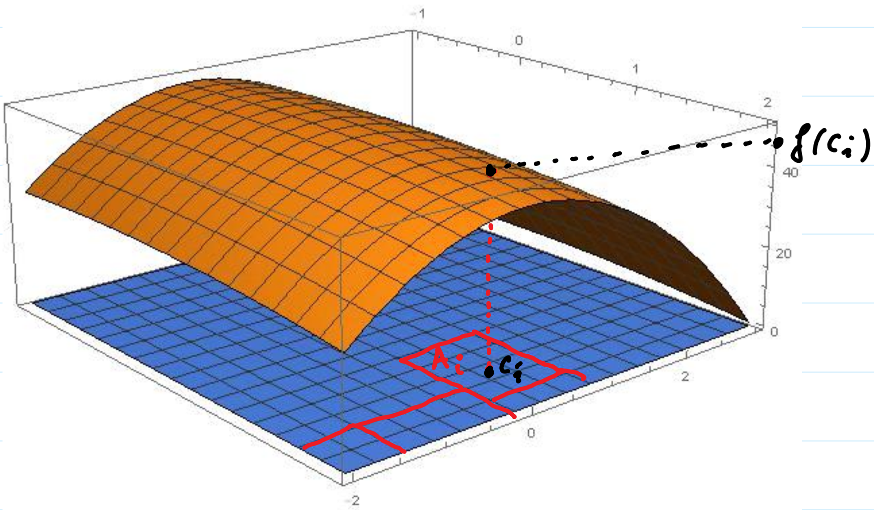


$f : \underbrace{[a,b] \times [c,d]}_{D} \longrightarrow \mathbb{R}$

Grafico di f:
$\{(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in D\}$

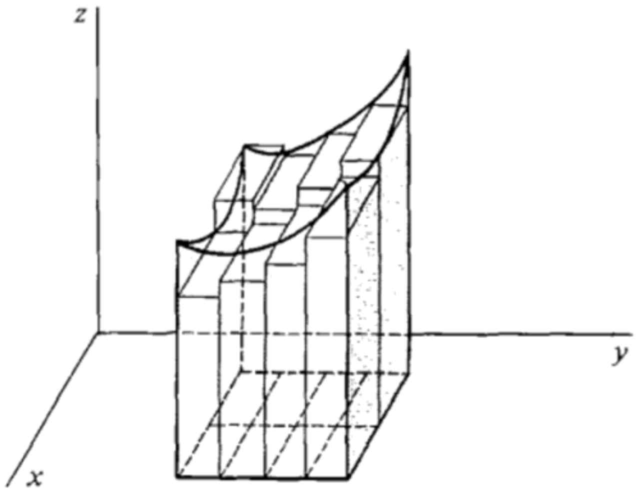
Trapezoide di f: $\mathrm{Trap}(f) = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq f(x,y)\}$

Problema: calcolo di Vol (Trap f)



Si scrive D come unione di rettangoli $\boxed{A_i}$ a due a due con interni disgiunti. Si sceglie $\boxed{c_i \in A_i}$
Il volume del parallelepipedo di base A_i e altezza $f(c_i)$ è $f(c_i) \times \mathrm{Area}(A_i)$.

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{Trap}(f)) \simeq \sum_i f(c_i) \times \mathrm{Area}(A_i)$$



DEF. f è integrabile su $[a,b]\times[c,d]$ se le somme $\sum_i f(c_i)\times \text{Area}(A_i)$, al variare di

$$\begin{cases} (A_i)_i \text{ rettangoli "disgiunti" con } \bigcup A_i = [a,b]\times[c,d] \\ c_i \in A_i \end{cases}$$

al tendere a zero dei lati dei rettangoli A_i.
Il limite in tal caso si chiama

integrale di f su $[a,b]\times[c,d]$

e si indica con

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy$$

Se $f \geq 0$ tale valore è il volume del trapezoide $\text{Trap}(f)$ di f.

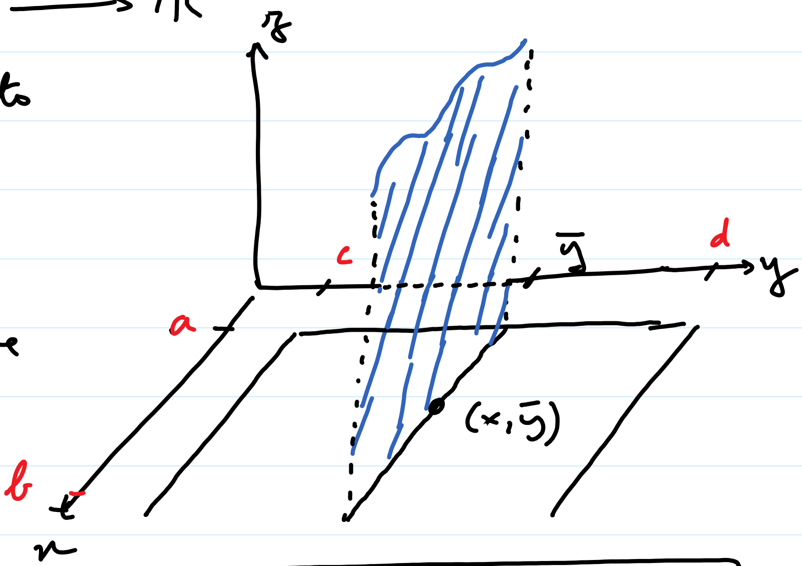
CALCOLO DI INTEGRALI DOPPI.

$f: [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$

$\bar{y} \in [c,d]$ fissato

$[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x,\bar{y})$



L'area della regione blu è

$$\int_a^b f(x,\bar{y})\,dx$$

Abbiamo una funzione $\boxed{\begin{array}{l} [c,d] \\ \ \ \Psi \\ \ \ y \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx \end{array}}$

ES: $f(x,y) = x e^{-y}$ $\quad x \in [0,1]$, $\quad y \in [2,3]$

Fissiamo $y \in [2,3]$, calcoliamo

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 x e^{-y}\,dx$$

si tratta y come costante

$$= e^{-y} \int_0^1 x\,dx = e^{-y} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{e^{-y}}{2}$$

L'INTEGRALE ITERATO $\quad f: [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$

① $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$: $\displaystyle y \longmapsto \int_a^b f(x,y)\,dx$

② Si integra la funzione rispetto ad y:

$$\int_c^d \left\{ \underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx} \right\} dy$$

$$\int_c \left\{ \underbrace{\int_a f(x,y)\,dx}_{\text{Funz. della } y} \right\} dy$$

ES. $f(x,y) = x e^{-y}$, $x \in [0,1]$, $y \in [2,3]$

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx = \frac{1}{2} e^{-y} \qquad \int_2^3 \left\{ \int_0^1 f(x,y)\,dx \right\} dy = \int_2^3 \frac{1}{2} e^{-y}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[-e^{-y}\right]_2^3 = \dots$$

L'espressione $\displaystyle\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\,dx \right\} dy$ si chiama integrale iterato di f su $[a,b] \times [c,d]$ (prima rispetto ad x, poi rispetto ad y).

Si può calcolare l'altro integrale iterato (prima rispetto ad y, poi rispetto ad x):

$$\int_0^1 \left\{ \int_2^3 f(x,y)\,dy \right\} dx$$

Si dimostra:

PROPOSIZIONE. Sia $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

f è integrabile.

Allora il suo integrale doppio coincide con entrambi gli integrali iterati, cioè

$$\underbrace{\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy}_{\substack{\text{integrale doppio} \\ \text{di } f \text{ su } [a,b]\times[c,d]}} = \underbrace{\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\,dx \right\} dy}_{\text{integrale iterato}} = \underbrace{\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx}_{\text{integrale iterato}}$$

FORMULA di RIDUZIONE

$$\Updownarrow$$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy$$

ESEMPIO. Calcolare $\displaystyle\int_{[0,\pi]_x\times[\pi,2\pi]_y} \sin(x+y)\,dx\,dy = I$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x+y)\,dy = \Big[-\cos(x+y)\Big]_{y=\pi}^{y=2\pi} = -\cos(x+2\pi)+\cos(x+\pi)$$
$$= -\cos x - \cos x = -2\cos x$$

$$\int_0^{\pi}\left\{\int_{\pi}^{2\pi}\sin(x+y)\,dy\right\}dx = \int_0^{\pi} -2\cos x\,dx = -2\Big[\sin x\Big]_{x=0}^{x=\pi} = 0$$

Quindi $\displaystyle\int_{[0,\pi]\times[\pi,2\pi]} \sin(x+y)\,dx\,dy = 0$

IL CASO di $f(x,y)=g(x)\,h(y)$ su un RETTANGOLO.

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} g(x)\,h(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d h(y)\,dy\right)$$

Verifica: x FISSATO $\displaystyle\int_c^d g(x)\,h(y)\,dy = g(x)\int_c^d h(y)\,dy$

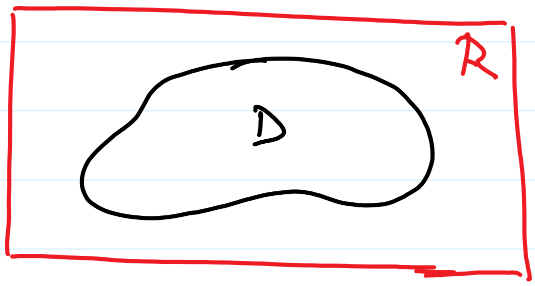
$$\int_a^b\left\{\int_c^d g(x)\,h(y)\,dy\right\}dx = \int_a^b g(x)\underbrace{\int_c^d h(y)\,dy}\,dx$$

$$= \left(\int_c^d h(y)\,dy\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right) \in \mathbb{R} \quad \#$$

INTEGRALE DOPPIO SU UN DOMINIO LIMITATO.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.
(D limitato)

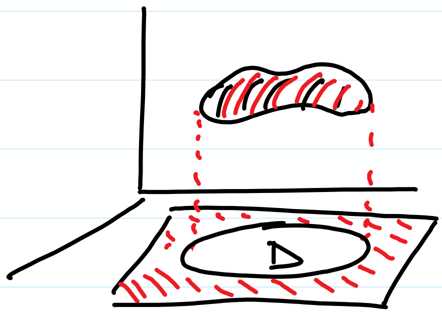
Consideriamo la funzione



$$f_R(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{su } D \\ 0 & \text{fuori di } D. \end{cases}$$

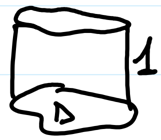
Si definisce

$$\int_D f := \int_R f_R$$



Si dimostra che f_R è "integrabile" e $\int_R f_R$ non dipende da R.

Area di D: per definizione è $\int_D 1\,dx\,dy$



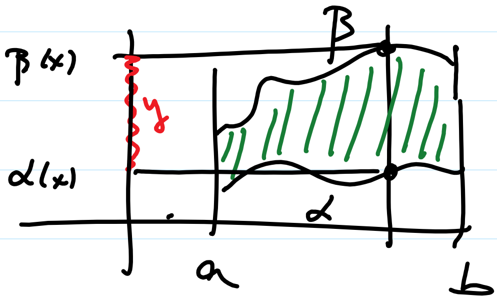
(volume del "cilindro" di base D e altezza 1).

DOMINI SEMPLICI rispetto ad una direzione

D è semplice rispetto a x se esistono $a<b$,

$\alpha, \beta: [a,b] \to \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$ e

$$D = \{(x,y) : x \in [a,b], \; \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

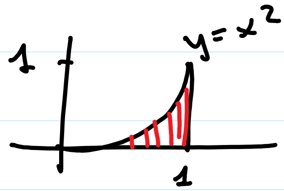


In tal caso

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \underbrace{\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy}_{\text{Funzione di } x}\,dx$$

ESEMPIO. $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq x^2\}$

D è semplice rispetto ad x. Qui $a=0$, $b=1$ e $\alpha(x)=0$, $\beta(x)=x^2$.



ESEMPIO. $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, \quad x \leq y \leq 2x\}$. Calcolare $\int_D x e^y\,dx\,dy$.

$$\int_D x e^y\,dx\,dy = \int_0^1 \left\{ \int_x^{2x} x e^y\,dy \right\} dx = \int_0^1 x \left\{ \int_x^{2x} e^y\,dy \right\} dx$$

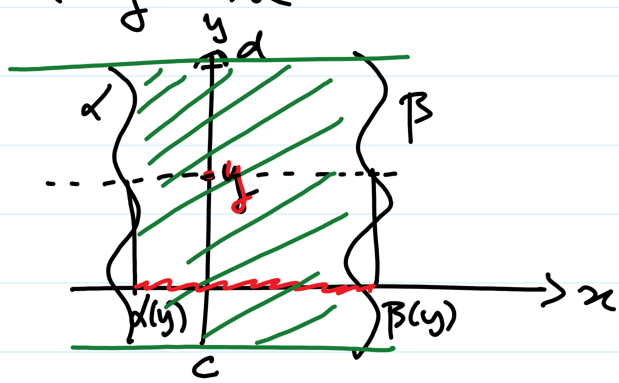
$$= \int_0^1 x\,(e^{2x} - e^x)\,dx = \dots \text{ (finire)}$$

D è semplice rispetto a y se

D è del tipo:

$D=\{(x,y): y\in[c,d],$

$\alpha(y)\le x\le\beta(y)\}.$



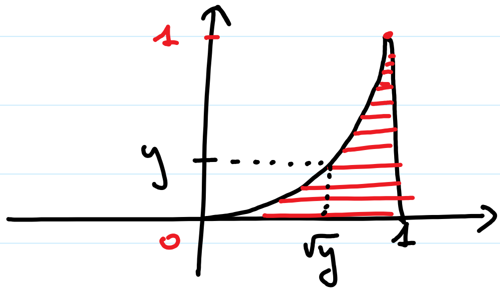
In tal caso

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\left\{\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\right\}dy.$$

ES. $D=\{(x,y):\ x\in[0,1],\ 0\le y\le x^2\}$

D è semplice rispetto a x e semplice rispetto ad y. Infatti

$D=\{(x,y): y\in[0,1]: \sqrt{y}\le x\le 1\}$



Se il dominio è semplice rispetto a x e a y si sceglie la formula a seconda che sia più semplice (o fattibile) il calcolo della primitiva di f rispetto ad x o a y.