Le formule di integrazione valgono anche rispetto ad altre direzioni..

ES. Integrazione per fili paralleli ad x.

$E =$ Proiezione di D nel piano yz

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (y,z) \in E \quad u_1(y,z) \leq x \leq u_2(y,z)\}$$

$$\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_E \left\{ \int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right\} dy\,dz$$

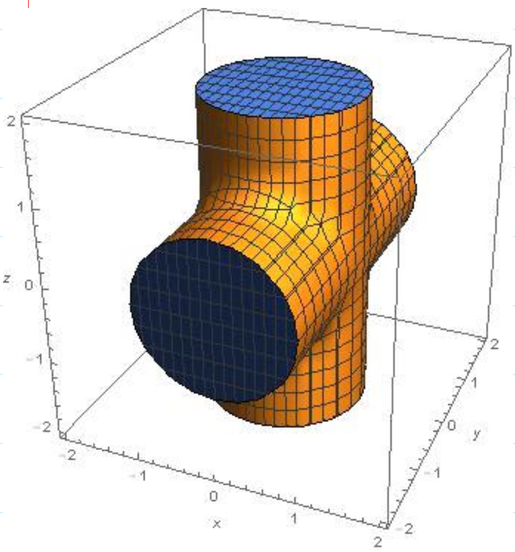
ES. Integrazione per piani // yz

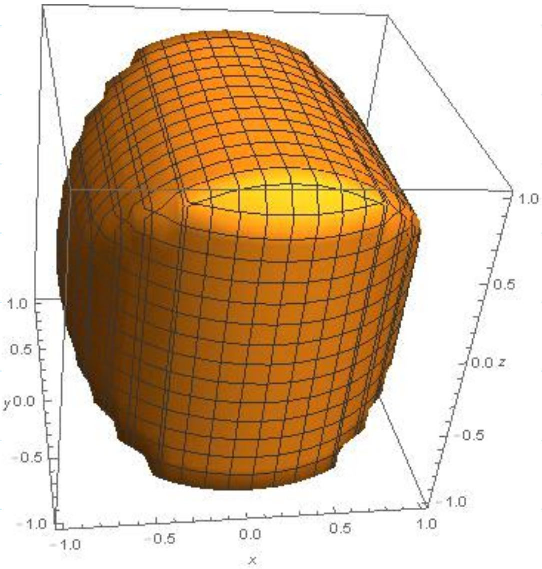
Supponiamo che $D \subseteq \mathbb{R}^3$ e che $[a,b]$ sia la proiezione di D nell'asse x.
Allora

$$\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left\{ \int_{D_x} f(x,y,z)\,dy\,dz \right\} dx$$

ESERCIZIO. Consideriamo l'intersezione D dei due cilindri $\begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ x^2+z^2 \le 1 \end{cases}$

Volume di D?





$$\begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ x^2+z^2 \le 1 \end{cases}$$

Integriamo per fili paralleli a z:

E = Proiezione di D nel piano xy.

$(x,y,z) \in D \Rightarrow x^2+y^2 \le 1$

Viceversa, se $x^2+y^2 \le 1$ si ha $x^2 \le 1 \Rightarrow$ esiste $z \in \mathbb{R}$:

$z^2 \le 1-x^2 \Rightarrow \exists\, z$ t.c. $(x,y,z) \in D$.

Quindi $E = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$

$$Vol(D) = \int_D 1\, dx\,dy\,dz = \int \left\{ \int^{\sqrt{1-x^2}} 1\, dz \right\} dx\,dy$$

$$\mathrm{Vol}(D) = \int_D 1\, dx\,dy\,dz = \int_{x^2+y^2\le 1} \left\{ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1\, dz \right\} dx\,dy$$

$$= \int_{x^2+y^2\le 1} 2\sqrt{1-x^2}\, dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left\{ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2}\, dy \right\} dx = \int_{-1}^{1} \left[2\sqrt{1-x^2}\, y \right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 2 \left((1-x^2) + (1-x^2) \right) dx = 4 \int_{-1}^{1} 1 - x^2\, dx = 8 \int_0^1 1 - x^2$$

$$= 8 \left([x]_0^1 - \left[\tfrac{1}{3} x^3\right]_0^1 \right) = 8 \left(1 - \tfrac{1}{3}\right) = \frac{16}{3}$$

Altro modo: piani perpendicolari a x

Altro modo: $\begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ x^2+z^2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1,1]$ e $\begin{cases} y^2 \le 1-x^2 \\ z^2 \le 1-x^2 \end{cases}$.

Proiezione di D sull'asse x è $[-1,1]$.

Fissato $x \in [-1,1]$ $\quad D_x = \{(y,z) : \; y^2 \le 1-x^2, \; z^2 \le 1-x^2\}$

$$= [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}] \times [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$$

$$\mathrm{Vol}(D) = \int_D 1\, dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} \int_{D_x} 1\, dy\,dz\; dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \mathrm{Area}(D_x)\, dx = \int_{-1}^{1} (2\sqrt{1-x^2})(2\sqrt{1-x^2})\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)\, dx = 8 \int_0^1 1 - x^2\, dx = \frac{16}{3}$$

ESERCIZIO. $\int_D yz\,dx\,dy\,dz$, dove D è la regione

che sta sopra il piano $z=0$, sotto il piano $z=y$, dentro il cilindro $x^2+y^2=4$.

$$D=\{(x,y,z):\ z\geq 0,\ z\leq y \ \text{ e } \ x^2+y^2\leq 4\}$$

Osserviamo che $0\leq z\leq y \Rightarrow y\geq 0$.

La proiezione di D sul piano xy è

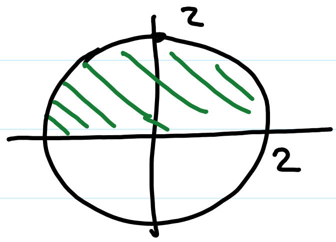
$$E=\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 4 \ \text{ e } \ y\geq 0\}$$

Integriamo per fili paralleli all'asse z

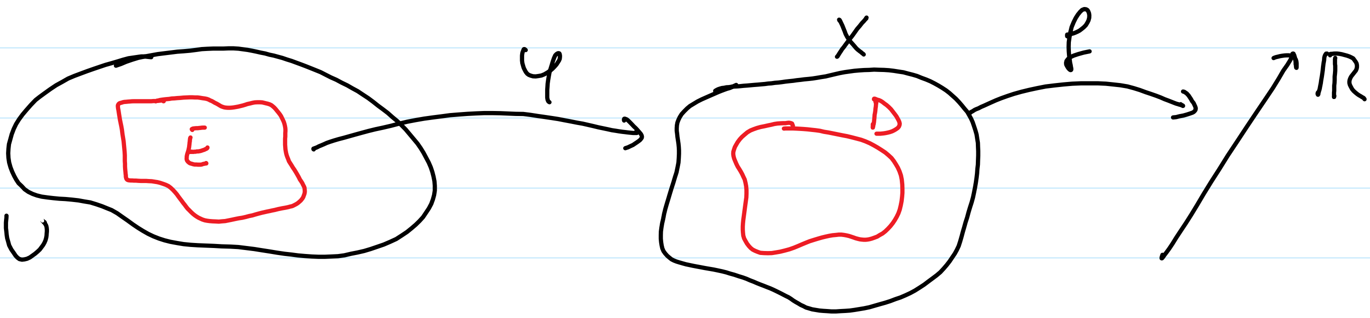
$$\int_D yz\,dx\,dy\,dz = \int_{\substack{x^2+y^2\leq 4\\ y\geq 0}} \left\{\int_0^y yz\,dz\right\} dx\,dy$$

$$= \int_{\substack{x^2+y^2\leq 4\\ y\geq 0}} y \int_0^y z\,dz \Big\} dx\,dy = \int_{\substack{x^2+y^2\leq 4\\ y\geq 0}} y\left[\tfrac{1}{2}z^2\right]_0^y dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\substack{x^2+y^2\leq 4\\ y\geq 0}} y^3\,dx\,dy$$



TEOREMA DI CAMBIAMENTO DI VARIABILE



- $\begin{cases} \varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to X \\ u = (u_1, u_2, u_3) \mapsto (\varphi_1(u), \varphi_2(u), \varphi_3(u)) \end{cases}$ di classe $\mathcal{C}^1$

$$\operatorname{Jac} \varphi(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \varphi_1 \\ \hline \nabla \varphi_2 \\ \hline \nabla \varphi_3 \end{pmatrix}$$

$$\int_D f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3 = \int_E f(\varphi(u_1, u_2, u_3)) \left| \det \operatorname{Jac} \varphi(u_1, u_2, u_3) \right| du_1 du_2 du_3$$

CAMBIAMENTO IN COORDINATE CILINDRICE

$x = \rho \cos t$, $y = \rho \sin t$, $z = z$, $\rho \geq 0$, $t \in [0, 2\pi]$

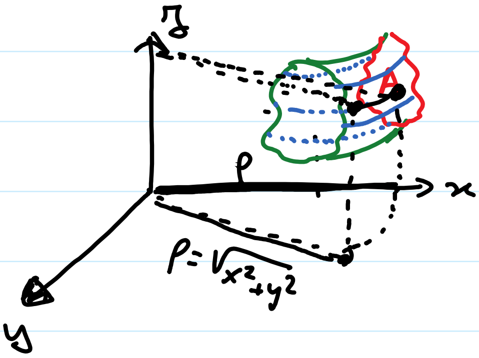
$$\varphi'(\rho, t, z) = \begin{pmatrix} \cos t & -\rho \sin t & 0 \\ \sin t & \rho \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \det \varphi'(\rho, t, z) = \rho$$

Tale cambiamento di variabile è utile se:

1) il dominio di integrazione D è ottenuto ruotando un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}_{x \geq 0} \times \mathbb{R}_z$ attorno all'asse z, cioè

un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}_{x\geq 0} \times \mathbb{R}_z$ attorno all'asse z, cioè

$$(x,y,z) \in D \iff \begin{cases} x = \rho\cos t \\ y = \rho\sin t \end{cases}, \quad (\rho, z) \in A, \quad t \in [0,\alpha]$$



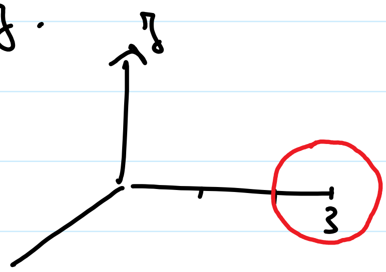
$$\iff \begin{cases} x = \rho\cos t \\ y = \rho\sin t \end{cases}, \left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right) \in A, \; t \in [0,\alpha] \qquad (*)$$

Scriveremo in tal caso $D = A^\alpha$.

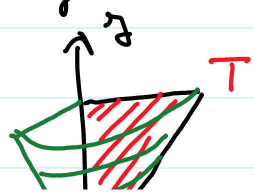
Si noti che per $\alpha = 2\pi$, dalla $(*)$ si ha

$$(x,y,z) \in A^{2\pi} \iff \left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right) \in A$$

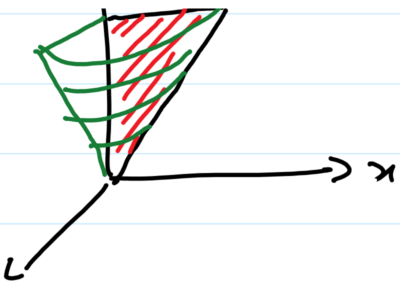
ESEMPIO. $(x,y,z) : \left(\sqrt{x^2+y^2} - 3\right)^2 + z^2 \leq 1$ è ottenuto ruotando $\{(x,z) : x \geq 0, (x-3)^2 + z^2 \leq 1\}$ del piano xz attorno all'asse z.



ESEMPIO (il cono). Si fa ruotare il rettangolo $T \subseteq \mathbb{R}_{x\geq 0} \times \mathbb{R}_z$ di un angolo $\alpha > 0$.
Si ottiene la porzione di cono T^α disegnata in figura



di cono T^α disegnato in figura.



$$T^\alpha = \{(\rho\cos t, \rho\sin t, z) : (\rho, z) \in T,\ t \in [0,\alpha]\}.$$

Se $\alpha = 2\pi$

$$T^{2\pi} = \{(x,y,z) : (\sqrt{x^2+y^2}, z) \in T\}.$$

2) $f(x,y,z) = g(\sqrt{x^2+y^2}, z).$

Si ha allora

$$\int_{A^\alpha} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{A^\alpha} g(\sqrt{x^2+y^2}, z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{\substack{t\in[0,\alpha] \\ (\rho,z)\in A}} g(\rho, z)\,\rho\,d\rho\,dz\,dt = \alpha \int_A g(\rho,z)\,\rho\,d\rho\,dz$$

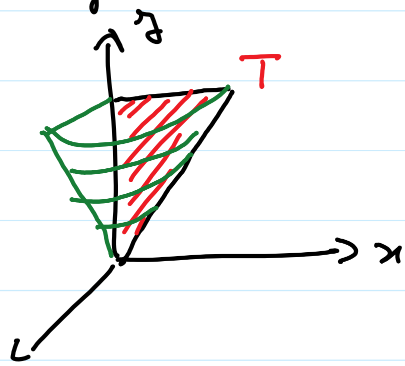
coordinate cilindriche

ESEMPIO. $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2} z$

$$D = \{(x,y,z) : (\sqrt{x^2+y^2} - 3)^2 + z^2 \leq 1\}$$

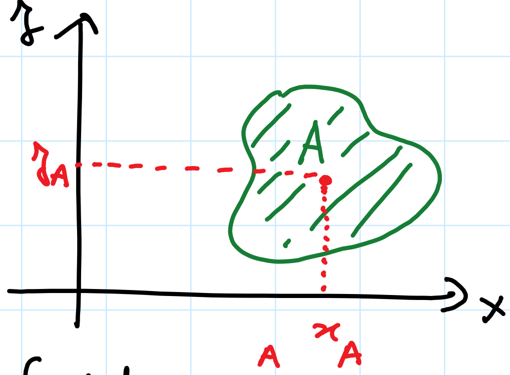
$$\int_D e^{x^2+y^2} z = 2\pi \int_{(\rho-3)^2+z^2\leq 1} e^{\rho^2} z\,\rho\,d\rho\,dz$$

ESEMPIO (il cono). Si fa ruotare il rettangolo $T \subseteq \mathbb{R}_{x\geq 0} \times \mathbb{R}_z$ di un angolo $\alpha > 0$.
Si ottiene la porzione di cono T^α disegnata in figura.



FORMULA di GULDINO per i solidi di rotazione.

$A^\alpha \subseteq \mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando $A \subseteq \mathbb{R}_{x\geq 0}\times\mathbb{R}_z$ attorno a z di un angolo $\alpha\in[0,2\pi]$.



Allora

$$Vol(A^\alpha) = \alpha\int_A x\,dx\,dz$$

$$= \alpha \times Area(A)\times x_A \qquad \left(x_A = \frac{\int_A x\,dx\,dz}{Area(A)}\right)$$

dove x_A = ascissa del baricentro di A

= distanza del baricentro dall'asse di rotazione.

Dim.

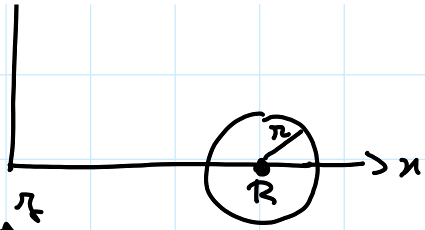
$$Vol(A^\alpha) = \int_0^\alpha \int_A 1\,\rho\,d\rho\,dz\,dt = \alpha\int_A \rho\,d\rho\,dz.$$

camb. in coordinate cilindriche

ESEMPIO "ciambella" (TORO) ottenuta ruotando il disco di centro $(R,0)$ raggio r attorno all'asse z.

attorno all'asse z.

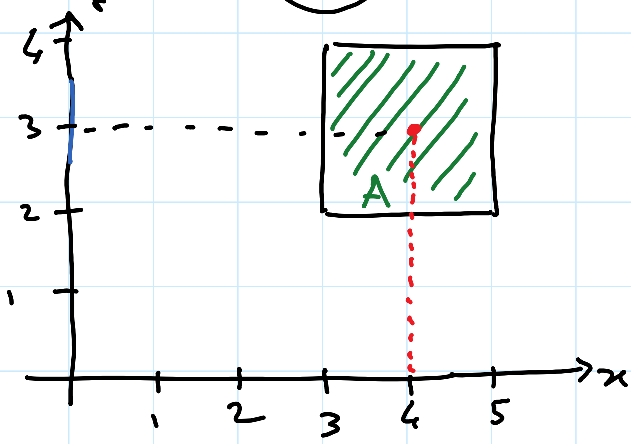
$$Vol = 2\pi \times \pi r^2 \times R$$



ESERCIZIO.

Volume del solido ottenuto ruotando il quadrato in figura $[3,5]\times[2,4]$ attorno all'asse z:

$$Vol: 2\pi \times 4 \times 4$$



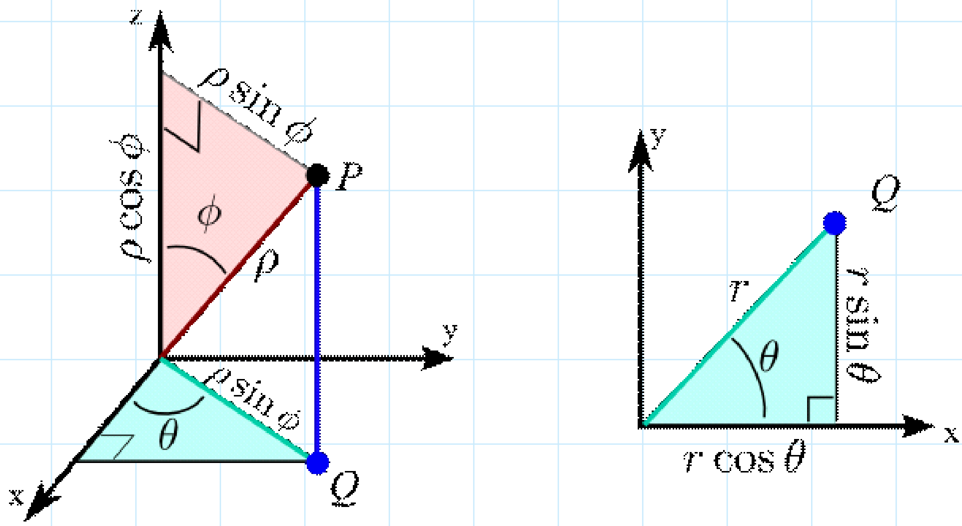
Vol. solido ottenuto ruotando A attorno all'asse x:

$$Vol: 2\pi \times 4 \times 3.$$

COORDINATE POLARI SFERICHE.

$P: (x, y, z) \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$z = \rho\cos\phi \qquad x = \rho\sin\phi\cos\theta \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta$



$$\boxed{x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi}$$

$\phi \in [0, \pi] \qquad \theta \in [0, 2\pi] \qquad \rho > 0$

$f: D \xrightarrow{\subseteq \mathbb{R}^3} \mathbb{R} \qquad \int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$$= \int f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\,\underbrace{\rho^2\sin\phi}_{\det \mathrm{Jac}}\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

ESEMPIO: Volume B_R = palla di raggio R

$$\int_{B_R} 1\,dx\,dy\,dz = \int_{\substack{\rho\in[0,R]\\ \theta\in[0,2\pi]\\ \phi\in[0,\pi]}} 1\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\,d\theta \int_0^R \rho^2\,d\rho \int_0^{\pi} \sin\phi\,d\phi$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

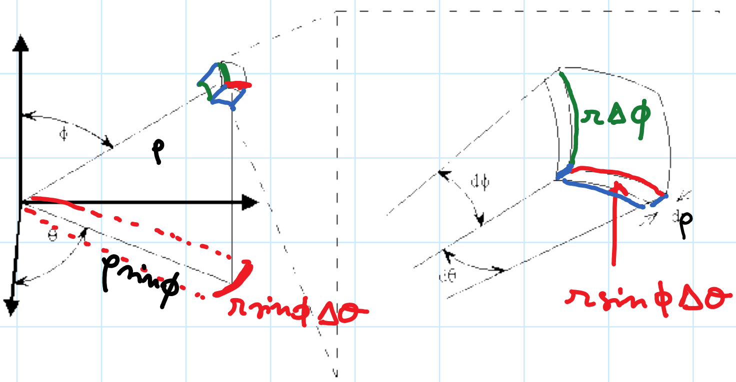
Spiegazione del termine $\rho^2 \sin\phi$

Facciamo variare ϕ, θ, ρ di $\Delta\phi, \Delta\theta, \Delta\rho$

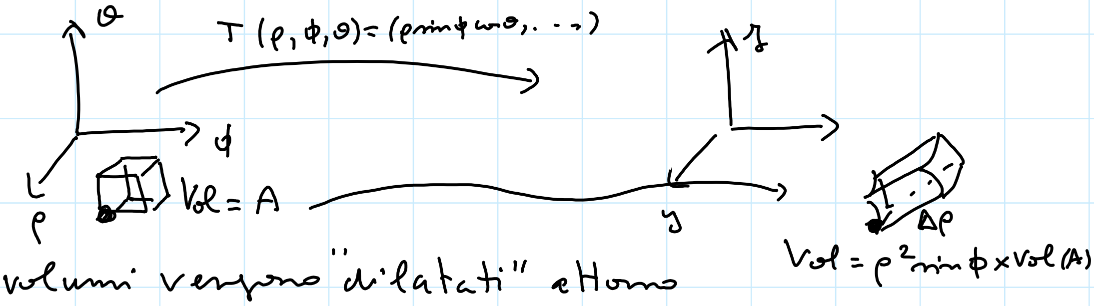
Otteniamo ≈ parallelepipedo di volume

$$(\rho \sin\phi \Delta\theta)(\rho\Delta\phi)\Delta\rho$$

$$= \rho^2 \sin\phi \underbrace{\Delta\theta\Delta\phi\Delta\rho}_{\text{volume}}$$



In altri termini, passando con il cambio di variabili dallo spazio (ρ, ϕ, θ) a (x, y, z)

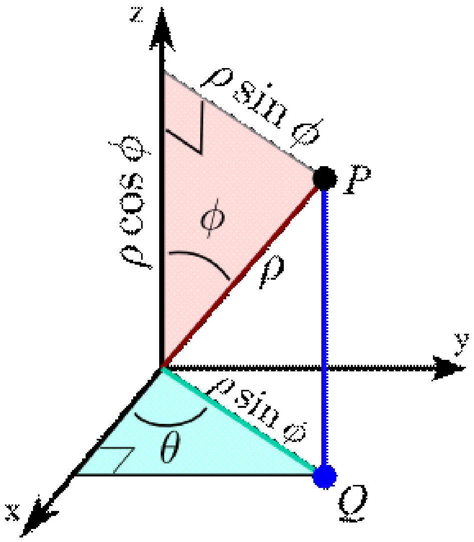


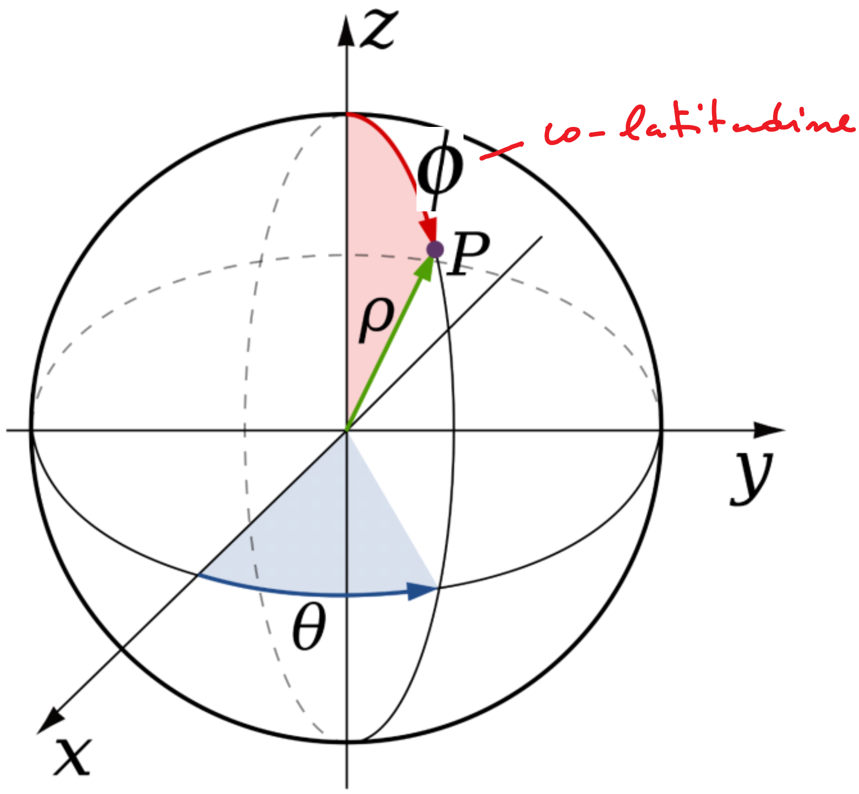
i volumi vengono "dilatati" attorno a (ρ, ϕ, θ) di $\rho^2 \sin\phi$.

COORDINATE POLARI SFERICHE.

$P: (x,y,z)$ $\qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$z = \rho \cos\phi \qquad x = \rho \sin\phi \cos\theta \qquad y = \rho \sin\phi \sin\theta$





$\phi \in [0, \pi]$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$$\boxed{x = \rho \sin\phi \cos\theta, \quad y = \rho \sin\phi \sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi}$$

$\phi \in [0,\pi] \qquad \theta \in [0, 2\pi] \qquad \rho > 0$

$f: D \xrightarrow{\subseteq \mathbb{R}^3} \mathbb{R} \qquad \int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$$= \int f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\, \underbrace{\rho^2 \sin\phi}_{\text{det Jac}}\; d\rho\, d\theta\, d\phi$$

ES. $f(x,y,z) = g(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$

$$\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int g(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_E g(\rho)\boxed{\rho^2 \sin\phi}\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

ESEMPIO: Volume B_R = palla di raggio R

$$Vol(B_R) = \int_{B_R} 1\,dx\,dy\,dz \underset{\text{coord. sferiche}}{\overset{\downarrow}{=}} \int_? 1 \cdot \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$? = \{(\rho,\phi,\theta),\ \rho \geq 0,\ \phi \in [0,\pi],\ \theta \in [0,2\pi],\ \rho \in [0,R]\}$$

$$= [0,R]_\rho \times [0,\pi]_\phi \times [0,2\pi]_\theta$$

$$Vol(B_R) = \int_{[0,R]_\rho \times [0,\pi]_\phi \times [0,2\pi]_\theta} \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= \left(\int_0^R \rho^2\,d\rho\right)\left(\int_0^\pi \sin\phi\,d\phi\right) \times \int_0^{2\pi} 1\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}R^3 \times [-\cos\phi]_0^\pi \times 2\pi = \frac{1}{3}R^3 \times 2 \times 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Interpretazione

Facciamo variare

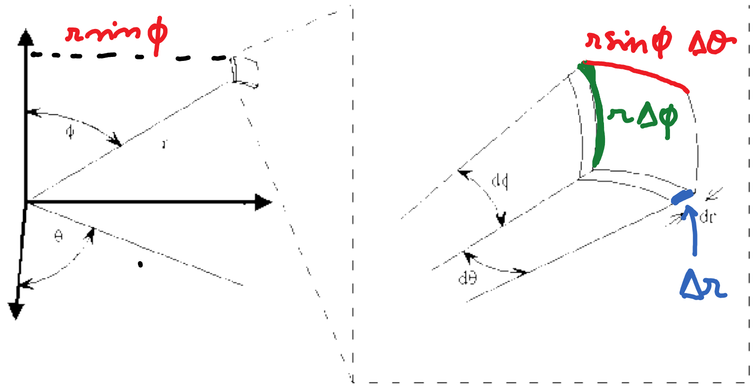
ϕ, θ, ρ di

$\Delta\phi, \Delta\theta, \Delta\rho$

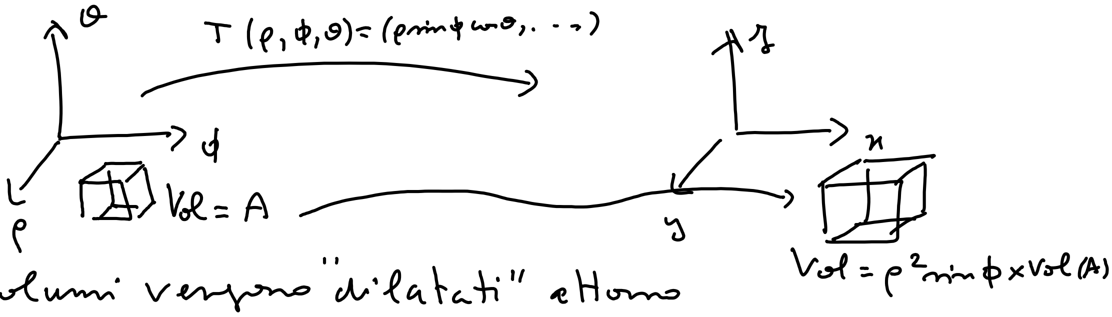
Otteniamo ≈ parallelepipedo di volume

$(\rho \sin\phi \Delta\theta)(\rho \Delta\phi) \Delta\rho$

$= \rho^2 \sin\phi \underbrace{\Delta\theta\, \Delta\phi\, \Delta\rho}_{\text{volume}}$



In altri termini, passando con il cambio di variabili dallo spazio (ρ, ϕ, θ) a (x, y, z)



i volumi vengono "dilatati" attorno a (ρ, ϕ, θ) di $\rho^2 \sin\phi$.