# VARIABILI CONGIUNTE

Una variabile aleatoria congiunta $\text{su}(\Omega, P)$ (a valori in $\mathbb{R}^2$) è una funzione

$$\omega \in \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

↑ sp. campionario

$$\omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega)),$$

dove $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sono variabili aleatorie.

## I] VARIABILI CONGIUNTE DISCRETE

**DEF.** Una variabile congiunta discreta su $(\Omega, P)$ è una coppia $(X, Y)$ di variabili discrete.
La densità congiunta discreta $p_{X,Y}$ di $(X, Y)$ è la funzione

$$p_{X,Y} : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto P(X = a, Y = b)$$

**OSSERVAZIONE.** Se $X$ assume i valori $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ e $Y$ assume i valori $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ allora

$$p_{X,Y}(a, b) \neq 0 \text{ al più su } \{(x_m, y_n) : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}.$$

$p_{X,Y}$ determina $p_X$ e $p_Y$ (DENSITÀ MARGINALI)

# PROPOSIZIONE (Densità marginali)

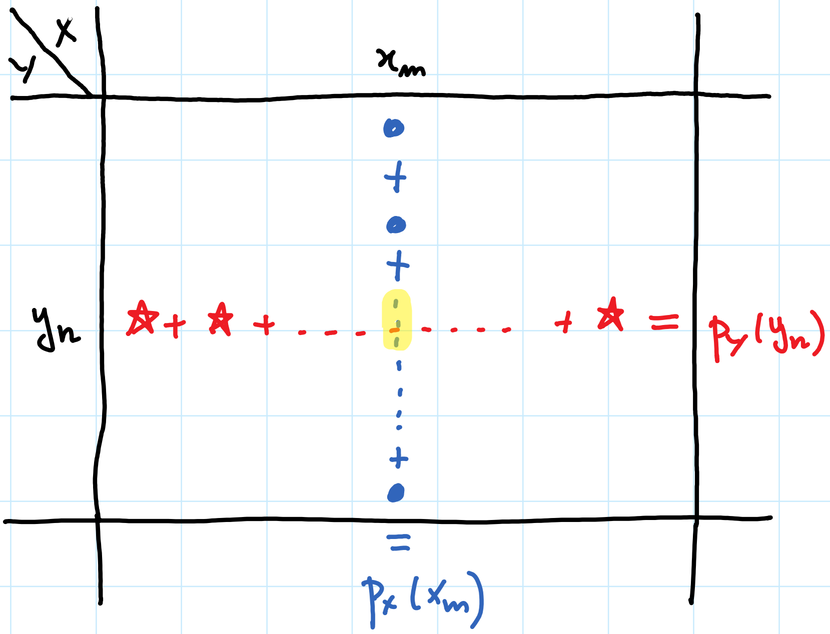
Sia $(X,Y)$ variabile congiunta discreta.

Allora $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

valori assunti da Y

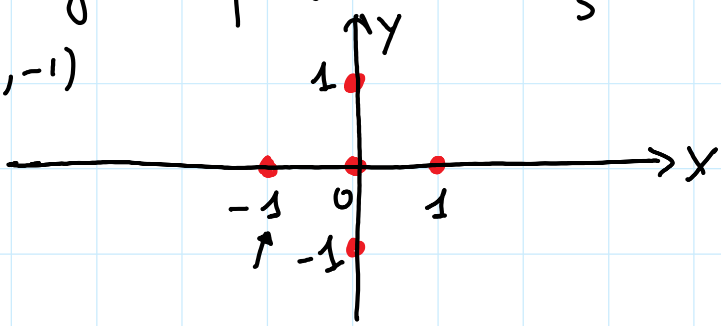
$$p_X(x) = P(X=x) = P(X=x, Y\in\mathbb{R}) = P\Big(\bigcup_n \{X=x, Y=y_n\}\Big)$$
$$= \sum_n P(X=x, Y=y_n) = \sum_n p_{X,Y}(x, y_n)$$

$$p_Y(y) = \sum_m p_{X,Y}(x_m, y)$$ ← valori assunti da X.




**ESEMPIO.** $(X,Y)$ assume i valori $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ e $(0,0)$ con uguale probabilità $\frac{1}{5}$

$p_{X,Y}(0,1) = p_{X,Y}(0,-1)$
$= p_{X,Y}(0,0) = \dots = \frac{1}{5}$



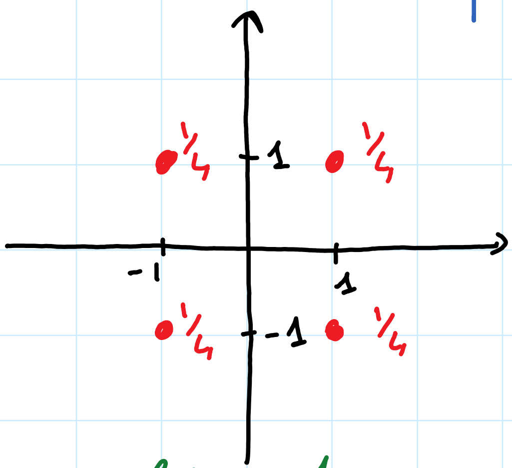

$$P(X=-1) = p_{X,Y}(-1,0) = \frac{1}{5}$$

$$P(X=0) = p_{X,Y}(0,-1) + p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(0,1) = \frac{3}{5}$$

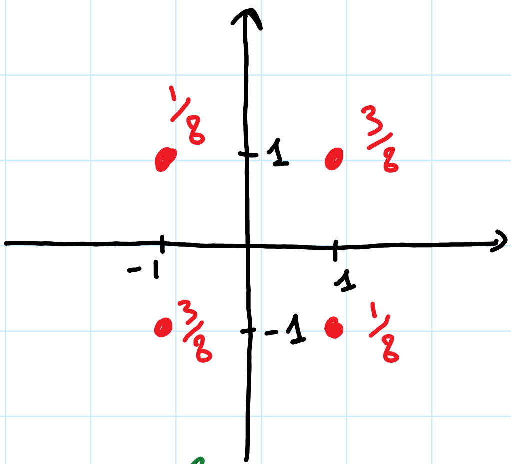
$$P(X=1) = \frac{1}{5}$$

**OSSERVAZIONE.** In generale la conoscenza di $p_X, p_Y$ non permette di determinare $p_{X,Y}$.

**ESEMPIO** (4 punti)




CASO 1




CASO 2

Caso 1:

$p_X(-1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ | $p_Y(-1) = \frac{1}{2}$

$p_X(1) = \frac{1}{2}$ | $p_Y(1) = \frac{1}{2}$

Caso 2:

$p_X(-1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$ | $p_Y(-1) = \frac{1}{2}$

$p_X(1) = \frac{1}{2}$ | $p_Y(1) = \frac{1}{2}$

**PROP** $X, Y$ discrete. $X$ e $Y$ sono indipendenti se e solo se

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\, p_Y(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

**Dim.** Se $X, Y$ sono indipendenti $\Rightarrow$

$$p_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indipend.}}}{=} P(X=x) \times P(Y=y) = p_X(x)\, p_Y(y).$$

Viceversa, supponiamo che $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\, p_Y(y)$

Viceversa, supponiamo che $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\, p_Y(y)$

$A, B \subseteq \mathbb{R}$

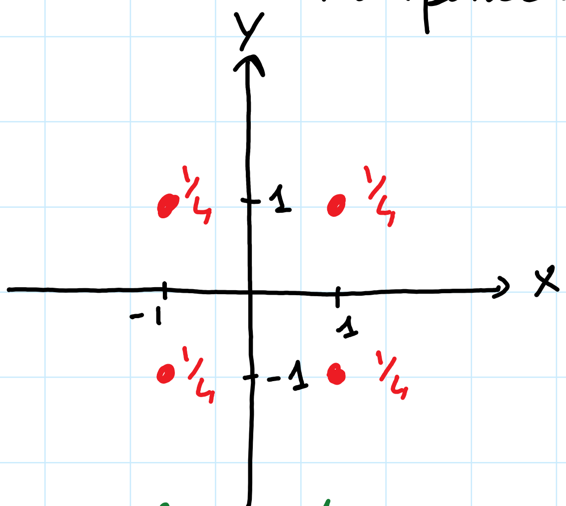
$$P(X\in A, Y\in B) = \sum_{\substack{a\in A\\ b\in B\\ a,b \text{ assunti da } X,Y}} P(X=a, Y=b) = \sum_{\substack{a\in A\\ b\in B}} p_{X,Y}(a,b)$$

$$= \sum_{\substack{a\in A\\ b\in B}} p_X(a)\, p_Y(b) = \Big(\sum_{a\in A} p_X(a)\Big)\Big(\sum_{b\in B} p_Y(b)\Big)$$

$$= P(X\in A) \times P(Y\in B)$$

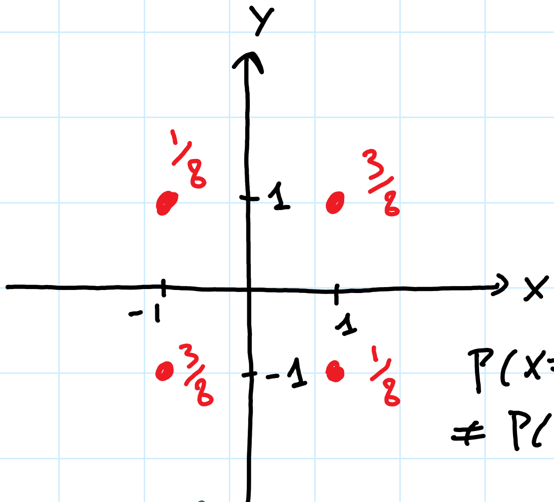
$\Rightarrow X, Y$ sono indipendenti #

ESEMPIO: In quale dei due casi $(X,Y)$ sono indipendenti?




CASO 1

INDIP




CASO 2

NON INDIP.

$P(X=1, Y=1) = \frac{3}{8}$

$\neq P(X=1)\, P(Y=1) = \frac{1}{4}$

$p_X(-1) = p_X(1) = \frac{1}{2}$

$p_Y(-1) = p_Y(1) = \frac{1}{2}$

ESERCIZIO. $(X,Y)$ congiunta discreta.

$X$ assume i valori $\{0, 1, 2\}$

$Y$ assume i valori $\{0, 1\}$

Tabella della densità congiunta ($\neq 0$)

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | $p_Y$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{3}{12}$ | $\frac{3}{12}$ | $\frac{7}{12}$ |
| 1 | $\frac{2}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{2}{12}$ | $5/12$ |
| $p_X$ | $3/12$ | $4/12$ | $5/12$ | |

a) Densità MARGINALI ?

b) X, Y indipendenti ? No: $p_{X,Y}(0,0) \neq p_X(0) \cdot p_Y(0)$.

c) $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$, $Cov(X,Y) = ?$

$$E(X) = 0\,P(X=0) + 1\,P(X=1) + 2\,P(X=2)$$

$$= 0\,p_X(0) + 1\,p_X(1) + 2\,p_X(2) = 1 \cdot \frac{4}{12} + 2 \cdot \frac{5}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

Idem $E(Y)$

$E(XY)$

$$E[g(X,Y)] = \sum g(x,y)\, P(X=x, Y=y)$$

$$= \sum g(x,y)\, p_{X,Y}(x,y)$$

$$E(XY) = \underset{\substack{x=0 \\ y=0}}{0} + 1 \cdot 1\, p_{X,Y}(1,1) + 2 \cdot 1\, p_{X,Y}(2,1)$$

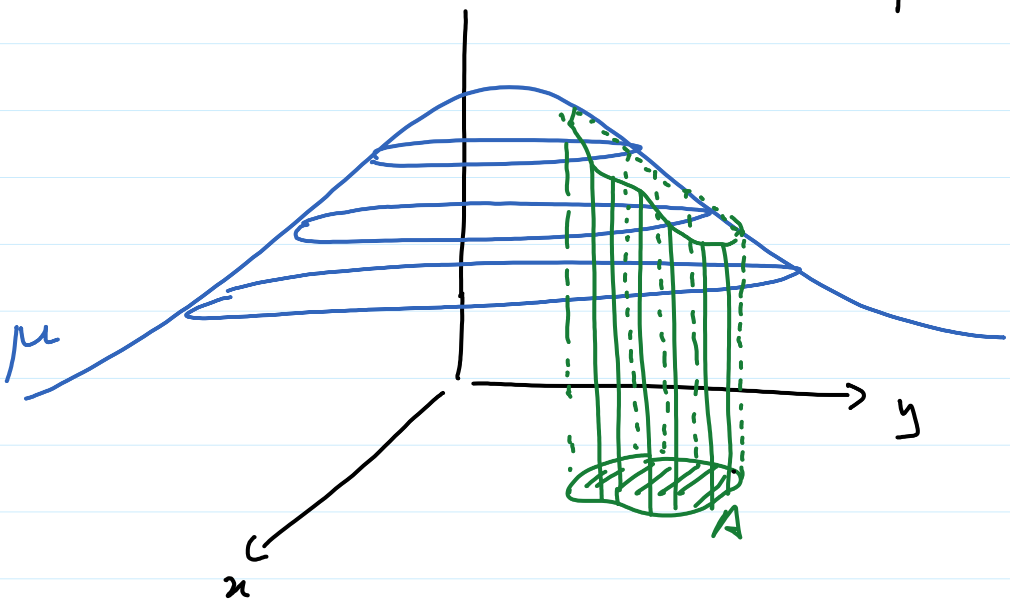
$$= p_{X,Y}(1,1) + 2\,p_{X,Y}(2,1) = \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

# II] Variabili congiunte continue.

## Motivazioni

1) Immaginiamo che il piano $\mathbb{R}^2$ sia una lastra metallica di densità lineare $\mu(x,y) \geq 0$.




La massa di una regione A è data da

$$\int_A \mu(x,y)\,dx\,dy.$$

2) $X, Y$ continue e <u>indipendenti</u>.

$$X \to f_X, \quad Y \to f_Y$$

$x, y \in \mathbb{R}$ Calcoliamo $P(X \leq x, Y \leq y)$

$$= P(X \le x) \times P(Y \le y)$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{x} f_X(s)\,ds\right) \times \left(\int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt\right) = \int_{]-\infty,x]\times]-\infty,y]} f_X(s) f_Y(t)\,ds\,dt$$

$$P(X \le x, Y \le y) = \int_{]-\infty,x]\times]-\infty,y]} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt \qquad f_{X,Y}(s,t) = f_X(s) f_Y(t)$$

$$P((X,Y) \in ]-\infty,x] \times ]-\infty,y])$$

DEF. Una variabile congiunta $(X,Y)$ si dice continua se esiste $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty[$ tale che

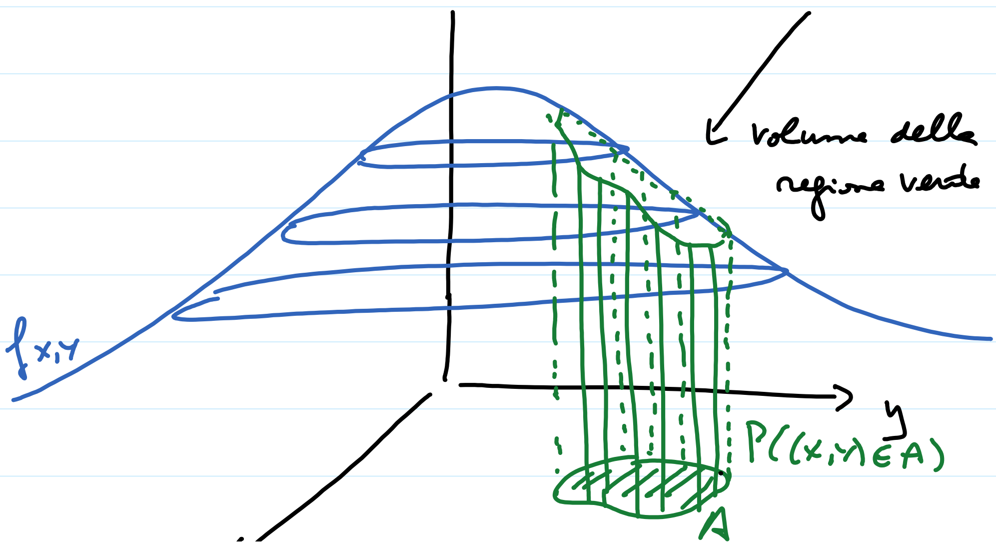
$$\int_{\mathbb{R}^2} f(s,t)\,ds\,dt = 1 \text{, e che}$$

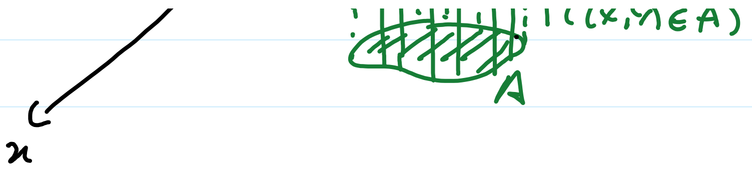
densità congiunta

$$\forall x,y \quad P(X \le x, Y \le y) = \int_{]-\infty,x]\times]-\infty,y]} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt$$

In tal caso si ha

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad P((X,Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$






**PROP.** $(X,Y)$ congiunta continua con densità $f_{X,Y}$

$\Rightarrow$ $X, Y$ sono continue, con densità

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \quad ; \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

densità marginale di X

densità marginale di Y

**Dim.** $P(X \le x) = P(X \le x, Y \in \mathbb{R})$

$$= \int_{]-\infty,x] \times \mathbb{R}} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt = \int_{-\infty}^{x} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(s,t)\,dt \right\} ds$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\,ds \quad \text{dove} \quad f_X(s) := \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(s,t)\,dt$$

Pertanto $X$ è continua con densità

$$f_X(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

Analogamente si trova il risultato per $Y$.

**OSS.** $X, Y$ indipendenti se e solo se

OSS. X, Y indipendenti se e solo se

$$f_{X,Y}(s,t) = f_X(s) f_Y(t) \quad \forall s,t.$$

Dim.

Abbiamo dimostrato sopra che

X, Y indipendenti $\Rightarrow f_{X,Y}(s,t) = f_X(s) f_Y(t)$

Viceversa, se $f_{X,Y}(s,t) = f_X(s) f_Y(t) \quad \forall s,t$ si ha

$\forall A, B \subseteq \mathbb{R}$

$$P(X \in A, Y \in B) = \int_{A \times B} f_{X,Y}(s,t)\, ds\, dt$$

$$= \int_{A \times B} f_X(s) f_Y(t)\, ds\, dt$$

$$= \left(\int_A f_X(s)\, ds\right)\left(\int_B f_Y(t)\, dt\right)$$

$$= P(X \in A)\, P(Y \in B)$$

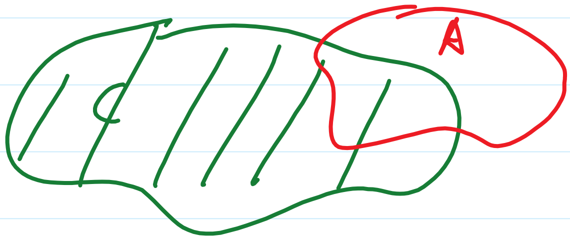
Quindi X, Y sono indipendenti.

DEF. La variabile uniforme su un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^2$ è la variabile congiunta continua con densità

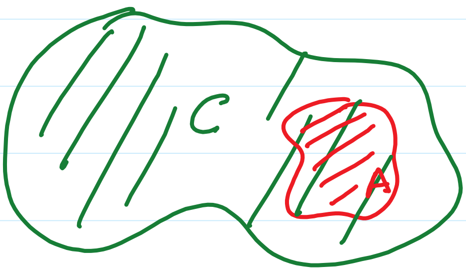
$$f_{X,Y}(s,t) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Area}(C)} & \text{se } (s,t) \in C \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(s,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{Area}(C)} & \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad P((X,Y)\in A) = \int_A f_{X,Y}(s,t)\, ds\, dt$$



Sia $A \subseteq C \Rightarrow f_{X,Y}(s,t) = \dfrac{1}{\text{Area}(C)} \quad \forall (s,t)\in A$



$$P((X,Y)\in A) = \int_A f_{X,Y}(s,t)\, ds\, dt$$

$$= \int_A \frac{1}{\text{Area}(C)}\, ds\, dt$$

$$= \frac{1}{\text{Area}(C)} \int_A 1\, ds\, dt = \frac{\text{Area}(A)}{\text{Area}(C)}$$

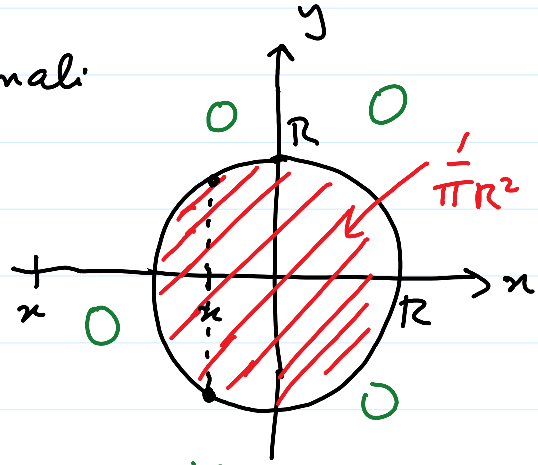
La probabilità di "colpire" la regione A è quindi proporzionale all'area di A.

ESEMPIO. (Variabile uniforme nel disco $B(0,R]$)

$$f_{X,Y}(s,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2} & \text{se } (s,t)\in B_R \\ 0 & \text{fuori} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(s,t) = \begin{cases} \dots \\ 0 & \text{fuori} \end{cases}$$

Calcoliamo la densità marginali

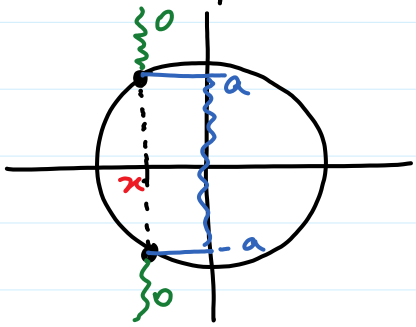



$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

<u>3 casi</u>:

1) $x \le -R$: $f_{X,Y}(x,y) \equiv 0 \quad \forall y$

$\Rightarrow f_X(x) = 0$




2) $x \in [-R, R]$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } |y| \ge a \\ \frac{1}{\pi R^2} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$a$: $x^2 + a^2 = R^2 \Rightarrow a^2 = R^2 - x^2 \Rightarrow a = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$\Rightarrow f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2}\,dy = \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}$$

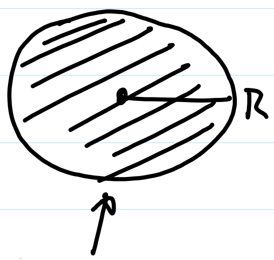
3) $x > R$ $\quad f_{X,Y}(x,y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow f_X(x) = 0$

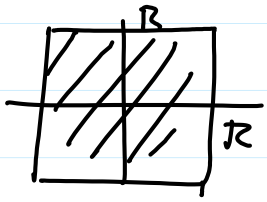
$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \ge R \\ \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - x^2} & \text{se } |x| \le R. \end{cases}$$

Analogamente per $f_Y(y)$.

Indipendenza di $X, Y$:

$X, Y$ indip $\Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$




$f_X(x)\, f_Y(y) \neq 0$

$f_X(x)\,f_Y(y) \neq 0$

$f_{X,Y} \neq 0$

$$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)\,f_Y(y).$$

se $(x,y): x^2+y^2 \leq R^2$ $\quad f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi R^2}$

$$f_X(x)\,f_Y(y) = \left(\frac{2}{\pi R^2}\right)^2 \sqrt{R^2-x^2}\,\sqrt{R^2-y^2}$$

sono diverse

OSS. Densità congiunta $\Rightarrow$ densità marginali.
Tuttavia vi possono essere svariate variabili congiunte che hanno stesse densità marginali.

ES. $X, Y$ variabili continue con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2} & \text{se } x \in [-R,R] \\ 0 & \text{altrim.} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2} & [-R,R] \\ 0 & \text{altrim.} \end{cases}$$

- $f_{X,Y}(x,y) := f_X(x)\,f_Y(y)$ ($\Rightarrow X, Y$ indipendenti)
- $f_{X,Y} \neq f_{\text{unif su } B_R}$
- $X, Y$ hanno stesse marginali della v. congiunta uniforme su $B_R$.

$\rightarrow f_{X,Y}$ determina univocamente $f_X, f_Y$

$\rightarrow$ da $f_X, f_Y$ non si può risalire a $f_{X,Y}$ (eccetto se $X, Y$ sono indipendenti).

OSSERVAZIONE: calcolo di $f_{X,Y}$ a partire da $F_{X,Y}$.

Si ha $F_{X,Y}(x,y) = \int_{]-\infty,x]\times]-\infty,y]} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt$

$$= \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt.$$

Sugli insiemi dove $f_{X,Y}$ è continua si ha quindi

$$\partial_y F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(s,y)\,ds$$

$$\partial_x(\partial_y F_{X,Y})(x,y) = f_{X,Y}(x,y).$$

Pertanto: nelle regioni dove $F_{X,Y}$ è $\mathcal{C}^2$ si ha

$$\partial^2_{x,y} F_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(x,y).$$

ESEMPIO. $F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y} & x>0\ y>0 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

Si ha $\partial^2_{x,y} F_{X,Y} = 0$ se $(x,y) \notin ]0,+\infty[\times]0,+\infty[$

$\partial^2_{x,y} F_{X,Y} = \partial_x\left(e^{-y} + e^{-x}e^{-y}\right) = e^{-x}e^{-y}$ se $x>0$, $y>0$.

Quindi $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x}e^{-y} & \text{se } x,y>0 \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$