ESERCIZIO. Due persone fissano un appuntamento tra le 12:00 e le 13:00. La prima arriva a caso tra le 12:15 e le 12:45, la seconda arriva a caso tra le 12:00 e le 13:00.
Qual è la probabilità che le due persone non debbano aspettarsi per più di 5 minuti?
[Le due persone arrivano indipendentemente fra di loro]

Soluzione. $X \sim U(15;45)$ $Y \sim U(0,60)$

X, Y <u>indipendenti</u>

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & x \in [15,45] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{60} & y \in [0,60] \\ 0 & \text{fuori} \end{cases}$$

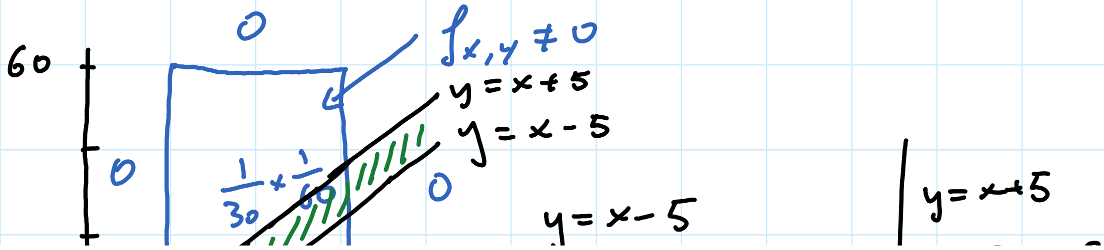
$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$ (ipotesi di indipendenza).

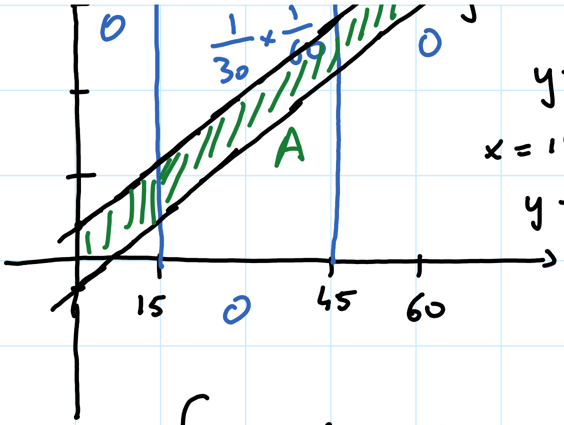
$$P(|X-Y| \le 5) = P((X,Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$A = \{(x,y) : |y-x| \le 5\} = \{(x,y) : x-5 \le y \le x+5\}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{30} \times \frac{1}{60} & \text{se } x \in [15,45] \text{ e } y \in [0,60] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

...





$y = x-5$

$x = 15: \quad y = 10 \leq 60$

$y = x+5$

$x=15 \to y=20$

$y = x+5$

$x=15 \to y=20$

$x=45 \to y=50$

$$\int_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\substack{x\in[15,45] \\ x-5 \leq y \leq x+5}} \frac{1}{30}\times\frac{1}{60}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{30}\times\frac{1}{60}\int_{15}^{45}\int_{x-5}^{x+5} dy\,dx$$

$$= \frac{1}{30}\times\frac{1}{60}\int_{15}^{45}(x+5)-(x-5)\,dx$$

$$= \frac{1}{30}\times\frac{1}{60}\times 10\,\underbrace{(45-15)}_{30} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$

Valore atteso di una composta di variabili continue.

X, Y continue con densità congiunta $f_{X,Y}(x,y)$

$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Allora $\quad E[g(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

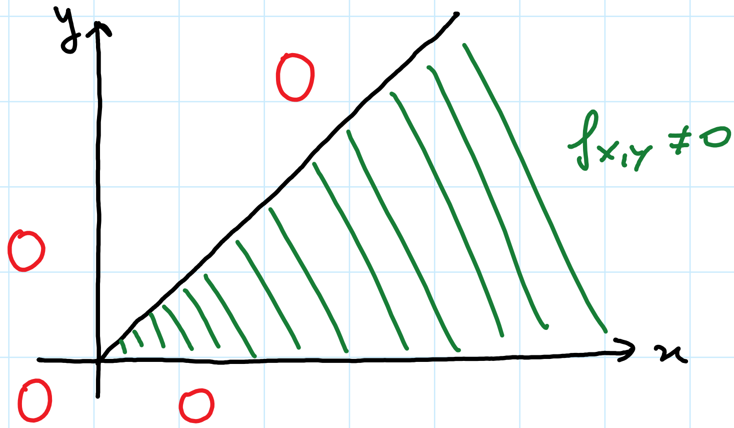
$\Rightarrow E[XY] = \int xy\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

$$\Rightarrow E[XY] = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} xy\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

ESERCIZIO. (X,Y) congiunta continua

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\,\dfrac{e^{-x}}{x} & \text{se } x>0,\ 0\le y<x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1) Trovare c 2) f_X, f_Y 3) $E(X)$, $E(Y)$, $Cov(X,Y)$.



1) Trovare c.

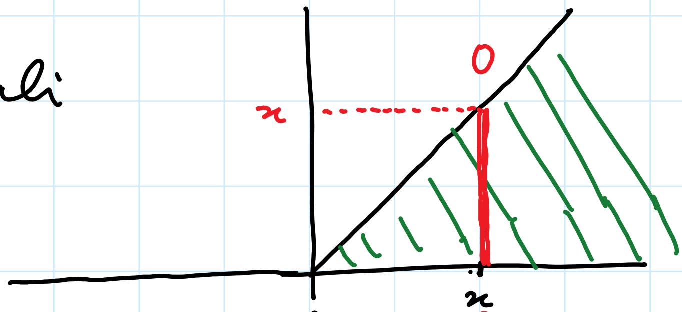
$$\int f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1 \iff c\int_{0\le y<x} \frac{e^{-x}}{x}\,dx\,dy = 1$$

$$\int_{0\le y<x} \frac{e^{-x}}{x}\,dx\,dy = \int_0^{+\infty}\int_0^{x} \frac{e^{-x}}{x}\,dy\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1$$

$$\Rightarrow c\cdot 1 = 1 \Rightarrow \boxed{c=1}$$

2) Densità marginali

$f_X(x) = ?$



- Se $x\le 0$: $f_{X,Y}(x,y)=0 \ \forall y \Rightarrow f_X(x) = 0$.

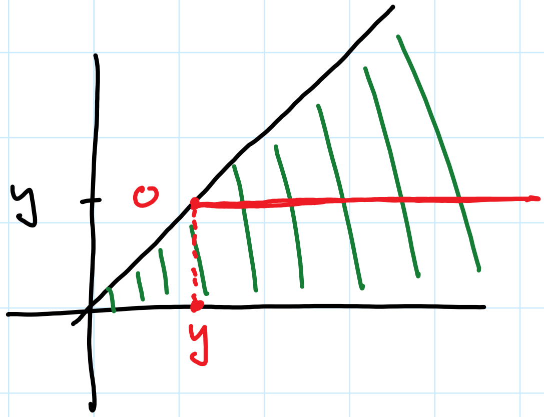
• Se $x \le 0$: $f_{X,Y}(x,y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow f_X(x) = 0.$

• Se $x > 0$: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^{x} \frac{e^{-x}}{x}\,dy = e^{-x}$

$f_Y(y) = ?$

• $y \le 0$: $f_Y(y) = 0$

• $y > 0$:



$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

$$= \int_y^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

• $E(X)$, $E(Y) = ?$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\,dx = 1 \left[\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n! \right]$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\,dy = \int_0^{+\infty} y \int_y^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx\,dy$$

$$= \iint_{0 \le y < x} y\, \frac{e^{-x}}{x}\,dx\,dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{x} y\, \frac{e^{-x}}{x}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \int_0^{x} y\,dy\,dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}$$

$$= \int_0 \frac{\ }{x} \int_0 y\, dy\, dx = \frac{1}{2}\int_0 x e \ldots dx = \frac{\ }{2}$$

- $Cov(X,Y)$

OSS: X, Y non sono indip: $f_X(x) f_Y(y) \neq 0 \iff x>0, y>0$

$f_{X,Y}(x,y) \neq 0 \iff 0 \leq y < x$.

$$\Rightarrow f_X(x) f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y).$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - \underbrace{E(X)E(Y)}_{\frac{1}{2}}$$

$$E(XY) = \int_{\mathbb{R}^2} xy\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \int_{0 \leq y < x} \cancel{x} y \frac{e^{-x}}{\cancel{x}}\, dx\, dy$$

$$= \int_{0 \leq y < x} y e^{-x}\, dx\, dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x y\, dy \right) e^{-x}\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} x^2 e^{-x}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\, dx = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$Cov(X,Y) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

ESERCIZIO. $X \sim U(0,4)$ $\quad \Theta \in U(0, \frac{\pi}{2})$ INDIPENDENTI

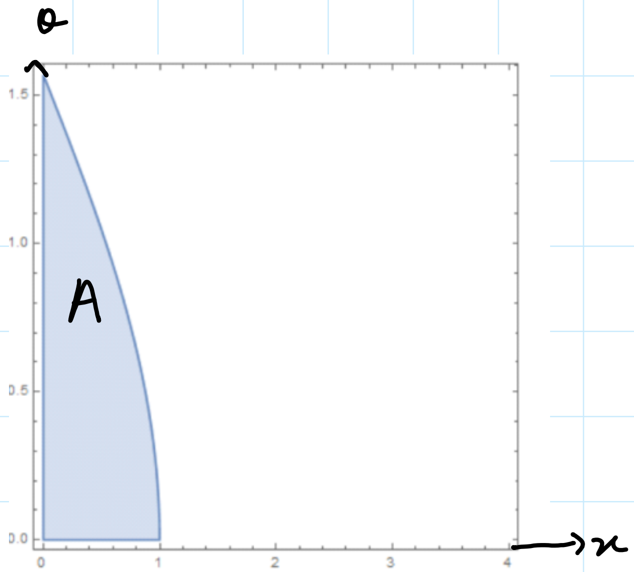
$$P(X < \cos\Theta) = P((X,\Theta) \in A)$$

$A = \{(x,\theta) : \quad x < \cos\theta\}$

$$= \int_A f_{X,\Theta}(x,\theta)\, dx\, d\theta = \int_A f_X(x) f_\Theta(\theta)\, dx\, d\theta$$

$$= \int_A f_{X,\Theta}(x,\theta)\,dx\,d\theta = \int_A f_X(x)\, f_\Theta(\theta)\,dx\,d\theta$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \quad x \quad x \in [0,4] \\ 0 \quad \text{altrim.} \end{cases} \qquad f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$\int_A f_X(x)\, f_\Theta(\theta)\,dx\,d\theta = \int_{0<x<\cos\theta} \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\pi}\,dx\,d\theta$$

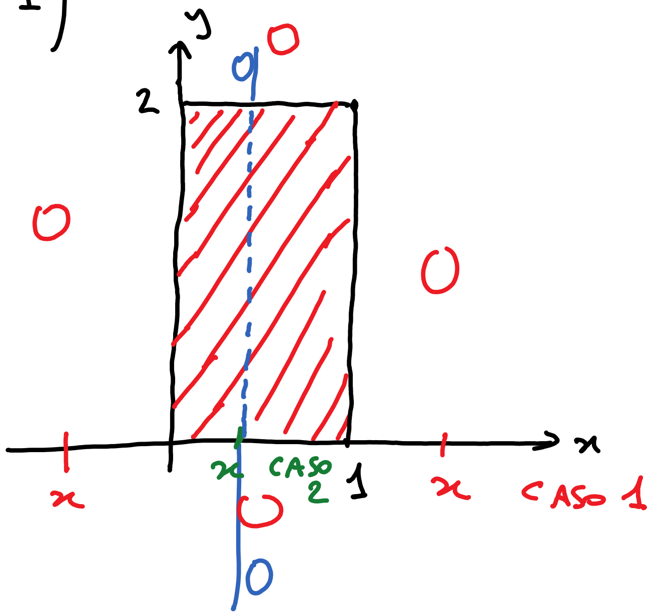
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} dx \quad d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[+\sin\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi}$$

ESERCIZIO. (X,Y) è congiunta continua,

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) & \text{se } 0<x<1,\ 0<y<2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\left(f_{X,Y} \geq 0, \int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1 \right)$$



- Calcolare $f_X(x)$
- $P(X>Y)$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,t)\,dt$$

2 casi:

1) $x<0$ o $x>1$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_{X,Y}(x,t) = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,t)\,dt = 0$

2) $x \in [0,1]$ $\quad f_{X,Y}(x,t) = \begin{cases} \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xt}{2}\right) & \text{se } t \in [0,2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{2} \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xt}{2}\right)dt + \int_{2}^{+\infty} 0\,dt$$

$$= \frac{6}{7}\int_0^2 x^2 + \frac{xt}{2}\,dt = \frac{6}{7}\left[x^2 t + \frac{x t^2}{4}\right]_{t=0}^{2}$$

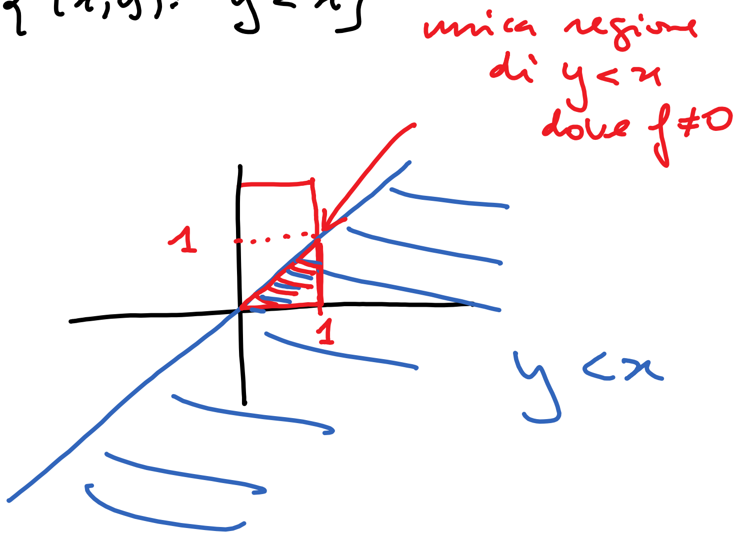
$$= \frac{6}{7}\left(2x^2 + x\right)$$

$$= \frac{6}{7}\left(2x^2+x\right)$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{7}(2x^2+x) & \text{se } x\in[0,1] \\ \boxed{0} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ii) $P(X>Y) = P\left((X,Y)\in\{(x,y):\ y<x\}\right)$

$$\int_{y<x} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt$$



$$\int_{\substack{y<x \\ x\in[0,1],\ y\in[0,2]}} \frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dx\,dy$$

$$\left.\begin{matrix} y<x \\ x\in[0,1],\ y\in[0,2] \end{matrix}\right\} = \left\{(x,y):\ x\in[0,1]\ 0<y<x\right\}$$

$$= \frac{6}{7}\int_{\begin{cases} x\in[0,1] \\ 0<y<x \end{cases}} x^2+\frac{xy}{2}\,dx\,dy = \frac{6}{7}\int_0^1\left\{\int_0^x x^2+\frac{xy}{2}\,dy\right\}dx$$

$$= \frac{6}{7}\int_0^1\left[x^2y+\frac{xy^2}{4}\right]_{y=0}^{y=x}dx = \frac{6}{7}\int_0^1\left(x^3+\frac{x^3}{4}\right)dx$$

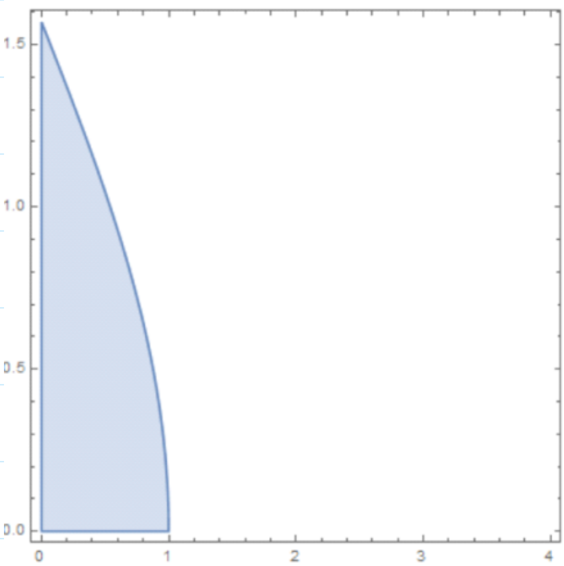
$$= \frac{6}{7}\cdot\frac{5}{4}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3\times 5}{7\times 4\times 2} = \frac{15}{56}$$

Es. $X \sim U(0,4)$ $\quad \Theta \sim U(0, \frac{\pi}{2})$

Calcolare $\mathbb{P}(X < \cos\Theta)$

$X < \cos\Theta \iff (X, \Theta) \in A$

$$A = \{(x,\theta) \in [0,4] \times [0, \tfrac{\pi}{2}] : \quad x < \cos\theta\}$$



$$P((X,\Theta) \in A) = \int_A f_X(x)\, f_\Theta(\theta)\, dx\, d\theta$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4 & x \in [0,4] \\ 0 & \text{fuori} \end{cases} \qquad f_\Theta(\theta) = \begin{cases} 1/\frac{\pi}{2} & \theta \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{fuori} \end{cases}$$

$$P((X,\Theta) \in A) = \int \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\pi}\, dx\, d\theta$$

$$P((X,\theta)\in A) = \int_{\substack{0<x<\cos\theta \\ \theta\in[0,\pi/2]}} \frac{\;}{4}\cdot\frac{\;}{\pi}\,dx\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} dx \quad d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\left[\sin\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi}.$$

Markov-Chebychev- grandi numeri

martedì 19 gennaio 2016 11:58

DISUGUAGLIANZE DI MARKOV e di CHEBYCHEV

Disuguaglianza di Markov.

X v.a. . $X \geq 0$, $a > 0$, $E(X)$ finito

$$\boxed{P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}}$$

ESEMPIO. $X \geq 0$, $E(X) = 3$. $P(X \geq 5) \leq \frac{E(X)}{5} = \frac{3}{5}$

Dim. • X è discreta: $E(X) = \sum x_k P(X = x_k)$ $\quad x_k \geq 0 \ \forall k$

$$\geq \sum_{x_k \geq a} x_k P(X = x_k)$$

$$\geq \sum_{x_k \geq a} a \, P(X = x_k) = a \, P(X \geq a)$$

$$\Rightarrow E(X) \geq a \, P(X \geq a)$$

• X continua

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) \, dx$$

$f_X(x) = 0$ $\quad x \ \ x < 0$: $0 = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t) dt$

$\Rightarrow F_X(x) = 0 \quad \forall x < 0$

$\Rightarrow f_X(x) = F_X'(x) = 0 \quad \forall x < 0.$

$$\Rightarrow E(X) = \int_0^{+\infty} x f_X(x) dx \geq \int_a^{+\infty} x f_X(x) dx \geq a \int_a^{+\infty} f_X(x) dx.$$

$= a\, P(X \geq a)$ #

Corollario: DISUGUAGLIANZA DI CHEBYCHEV.

X v.a, $\underset{\mu}{\overset{\shortparallel}{E(X)}}$, $\underset{\sigma^2}{\overset{\shortparallel}{Var(X)}}$ finite [non più $X \geq 0$]

$\varepsilon > 0$ fissato $\quad P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

OSS. Se $Var\, X$ è piccola $P(|X-\mu| \geq \varepsilon)$ è piccola;

se ε è grande, $P(|X-\mu| \geq \varepsilon)$ è piccola.

Dim. $\quad P(|X-\mu| \geq \varepsilon) = P(\underbrace{|X-\mu|^2}_{Y} \geq \varepsilon^2)$

$$P(\underset{\overset{\vee\!\shortmid}{0}}{Y} \geq \varepsilon^2) \underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{E(Y)}{\varepsilon^2} = \frac{E(|X-\mu|^2)}{\varepsilon^2} = \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} \quad \#$$

ESEMPIO. X v.a. $\quad E(X) = 20, \quad Var(X) = 20.$

Stimare $P(X \in [10, 30]) = P(|X-20| \leq 10)$

$P(|X-20| \leq 10) = 1 - P(|X-20| > 10)$

Chebychev: $\quad P(|X-20| > 10) < \dfrac{Var(X)}{100} = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow 1 - P(|X-20| > 10) > 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

Es: se $X \sim N(20,20)$ è $X = 20 + \sqrt{20}\, Z$ con $Z \sim N(0,1)$:

$$P(|X-20| \le 10) = P(\sqrt{20}|Z| \le 10) = P\left(|Z| \le \frac{10}{\sqrt{20}}\right)$$
$$= P\left(\frac{-10}{\sqrt{20}} \le Z \le \frac{10}{\sqrt{20}}\right) = \phi\left(\frac{10}{\sqrt{20}}\right) - \phi\left(\frac{-10}{\sqrt{20}}\right)$$
$$= 2\phi\left(\frac{10}{\sqrt{20}}\right) - 1 << \frac{4}{5}$$

Legge debole dei grandi numeri

All'inizio del corso siamo stati tentati di definire la probabilità come il limite delle frequenze di realizzazione dell'evento.

ESEMPIO. Moneta. $X_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i\text{-esimo lancio dà Testa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

p = probabilità di avere Testa

Frequenza di teste su n lanci: $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$

Problema: $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} p$?

Se $\{X_i\}_i$ sono i.i.d la varianza della media (campionaria) $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ diventa sempre più piccola: $Var\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} n \, Var X_i = \frac{Var X_i}{n}$.

$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ si "stringe" sempre di più attorno alla sua media:

Legge debole dei grandi numeri.

$(X_i)_i$ i.i.d, $\mu := E(X_i)$, $\sigma^2 := Var(X_i)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Dim. Applicare Chebychev a $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$:

$$E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \mu; \quad Var\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

ESEMPIO. X_i i.i.d., $5 = E(X_i)$, $4 = Var(X_i)$.
Determinare ε affinché

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_{1000}}{1000} - 5\right| \geq \varepsilon\right) \leq 10\%$$

Sappiamo che

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_{1000}}{1000} - 5\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{1000\,\varepsilon^2} = \frac{4}{1000\,\varepsilon^2} = \frac{1}{250\,\varepsilon^2}$$

È sufficiente che $\frac{1}{\varepsilon^2 250} < \frac{1}{10}$ cioè $\varepsilon^2 > \frac{1}{25}$ $\boxed{\varepsilon > \frac{1}{5}}$

LEGGE FORTE DEI GRANDI NUMERI.

X_i i.i.d. con $E(X_i) = \mu \in \mathbb{R}$ e $Var(X_i) < \infty$.
Allora $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$ con probabilità 1

cioè $P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \mu\right) = 1$

La legge dei grandi numeri fornisce una giustificazione teorica della probabilità come limite delle frequenze di realizzazione di un evento.

ESEMPIO Lancio di moneta che dà testa con probabilità p.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\#\text{teste in } n \text{ lanci}}{n} = p \quad \text{con probabilità } 1.$$

ESERCIZIO

Sia X una variabile aleatoria di media 20 e varianza. Sia p=P(X>26).

(a) Si usi la disuguaglianza di Markov per ottenere un limite superiore a p.
(b) Si usi la disuguaglianza di Chebyshev per ottenere una stima dall'alto di p.
(c) Si approssimi p usando una opportuna variabile normale sapendo che X è di Poisson.