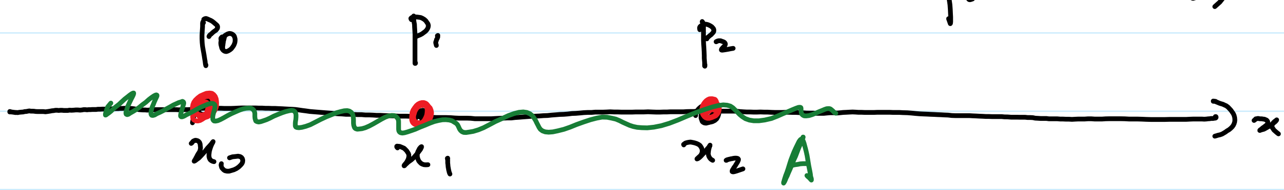
VARIABILI CONTINUE

DEF. X discreta se X assume al più una successione di valori $x_0, x_1, x_2, \dots$

$$p_i = P(X = x_i)$$



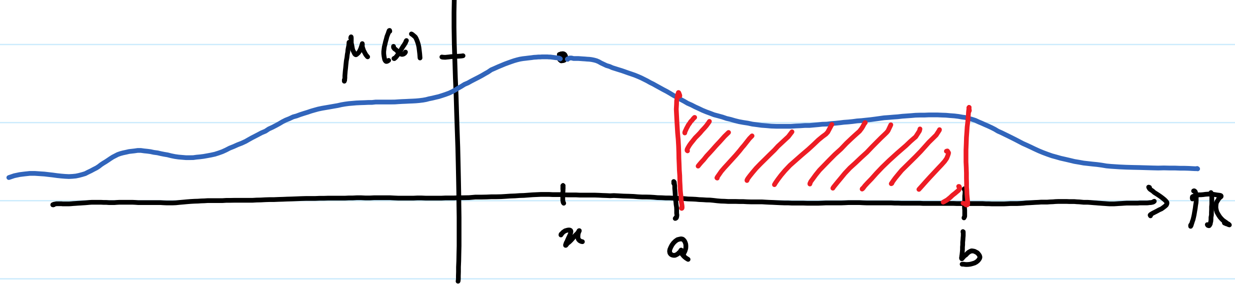
$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$$

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ contiene i punti $\{x_i : i \in I_A\}$

$$P(X \in A) = \sum_{i \in I_A} P(X = x_i) = \sum_{i \in I_A} p_i$$

Ritorno al calcolo di una massa data una densità.

μ densità su $\mathbb{R}$



$$\text{Massa di } [a,b] = \int_a^b \mu(x)\,dx$$

Massa di $\mathbb{R}$ è 1: $\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x)\,dx = 1$

$m(]-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} \mu(t)\,dt \qquad m(\{x\}) = \int_{x}^{x} \mu = 0$

FUNZIONI $\mathcal{C}^1$ a tratti e continue.

Th. fondamentale del calcolo

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Allora:

① $F' = f$ (F è primitiva di f)

$\Updownarrow$

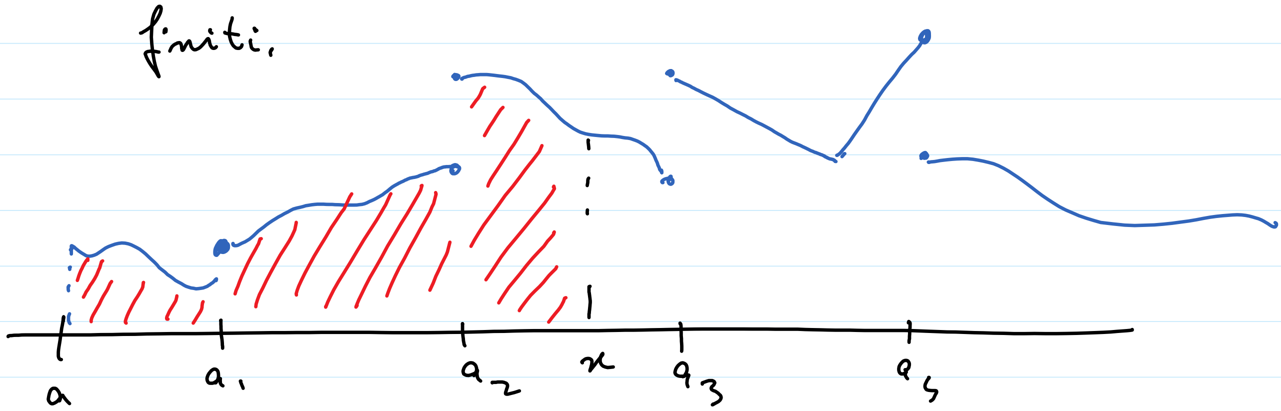
② $F(y)-F(x)=\int_x^y f(t)\,dt \quad \forall\, x,y\in[a,b]$

In particolare se $F(x)=\int_c^x f(t)\,dt$ è $F'(x)=f(x)$

Il risultato si estende (quasi) a funzioni f più generali.

DEFINIZIONE. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua a tratti se esistono $a\le a_1<a_2<\dots<a_n\le b$ tali che

- f continua in $[a,a_1[,\ ]a_1,a_2[,\ \dots,\ ]a_n,b]$
- Esistono $f(a_i^-):=\lim_{x\to a_i^-} f(x)$, $f(a_i^+)=\lim_{x\to a_i^+} f(x)$ finiti.



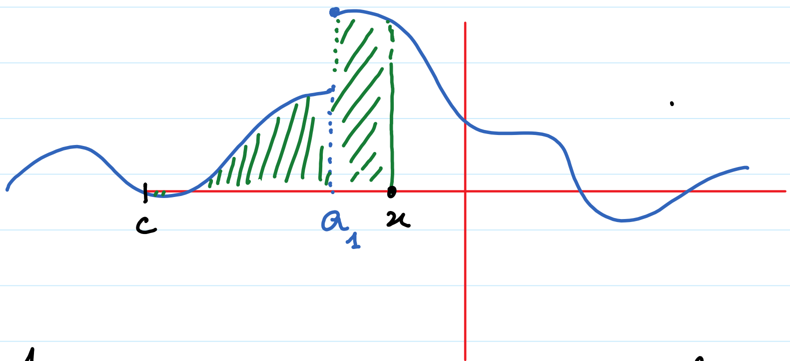
Se f è continua a tratti, f è integrabile e l'integrale si calcola usando il TFC su ogni intervallo dove f è continua.

ESEMPIO. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0,1[\\ 2 & \text{se } t = 1 \\ t & \text{se } t \in]1,2]. \end{cases}$

$$\int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 1\,dt + \int_1^2 t\,dt = [t]_0^1 + \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^2$$
$$= 1 + \frac{1}{2}(4-1) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

PROP. Se f è continua a tratti, f è integrabile su $[a,b]$; posto $(c \in [a,b])$ $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ si ha:

1) F è continua
2) $F'(x) = f(x)$ eccetto che nei salti di f
3) $F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\,dt \quad \forall x, y \in [a,b]$.



$\Rightarrow$ F è $\mathcal{C}^1$ su ogni intervallino dove f è continua, e $F'(a^\pm)$ esistono finiti in ogni punto di salto di f.

Si dice che F è $\mathcal{C}^1$ a tratti, continua.

ES

$$f(t)=\begin{cases} 1 & \text{se } t\in[0,1[\\ 2 & \text{se } t=1 \\ 2t & \text{se } t\in]1,2]. \end{cases}$$

Determiniamo $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

- se $x\in[0,1]$ $\quad F(x)=\int_0^x 1\,dt = x$
- $x\in[1,2]$ $\quad F(x)=\int_0^x f(t)dt = \underbrace{\int_0^1 f(t)dt}_{[x]_0^1=1} + \underbrace{\int_1^x f(t)dt}_{2\int_1^x t\,dt}$

$$F(x)=1+\int_1^x t\,dt = 1+(x^2-1)$$

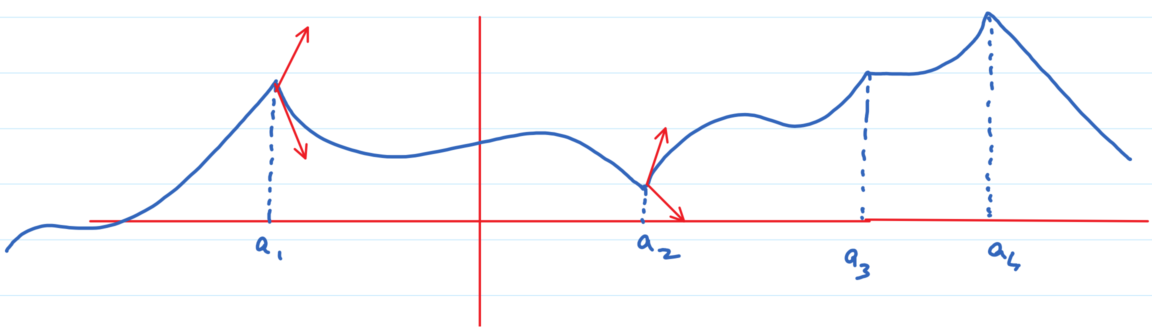
$$F(x)=\begin{cases} x & \text{se } x\in[0,1] \\ x^2 & \text{se } x\in[1,2] \end{cases}$$

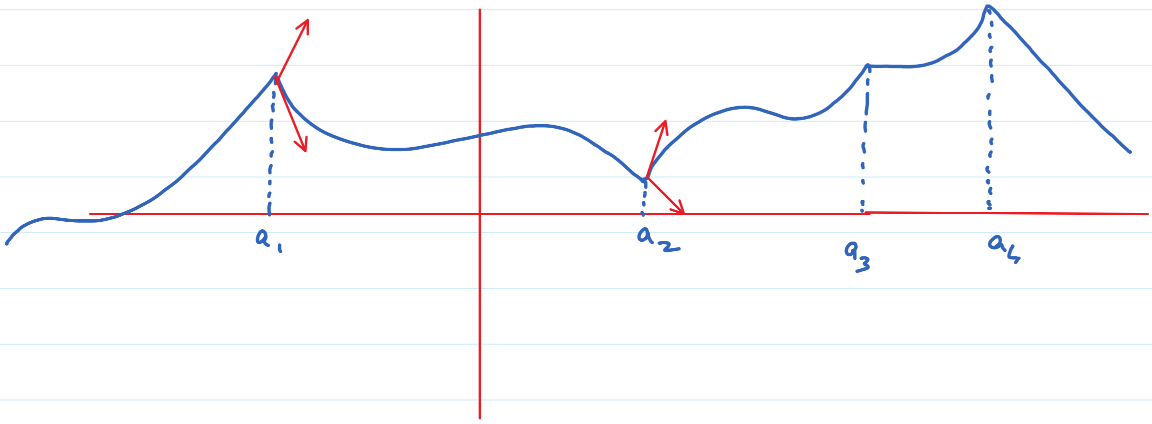
F continua, $\mathcal{C}^1$ in $[0,1]$, $\mathcal{C}^1$ in $[1,2]$ $\left[\begin{array}{l} F \text{ è } \mathcal{C}^1 \text{ in } [a,b] \text{ se è} \\ \mathcal{C}^1 \text{ in }]a,b[\text{ e in } a,b \text{ ha} \\ \text{derivate dx, sx finite} \end{array}\right]$

DEF. F è $\mathcal{C}^1$ a tratti e continua se

esistono $a\le a_1<\dots<a_n\le b$ tali che

- F è $\mathcal{C}^1$ in $[a,a_1],\dots,[a_n,b]$
- F è continua

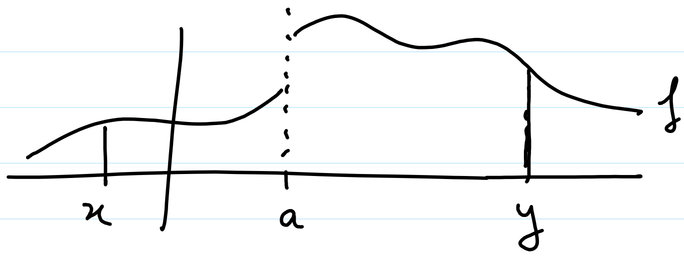




PROP Sia $F: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e $\mathcal{C}^1$ a tratti

Allora:

- $F' = f$ eccetto eventualmente in un numero finito di punti;
- $F(y) - F(x) = \displaystyle\int_x^y f(t)\,dt.$



$$\Big[\; F(y) - F(x) = \underbrace{\big(F(y) - F(a)\big)}_{\int_a^y f(t)dt} + \big(F(a) - F(x)\big)$$

$$\int_a^y f(t)dt + \int_x^a f(t)dt = \int_x^y f(t)dt. \;\Big]$$

ESEMPIO. $f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ e^{-t} & t \in]0,1[\\ 1/t^2 & t \geq 1 \end{cases}$ $\qquad F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,dt = ?$

- $x \leq 0$ $\quad F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x 0 = 0$
- $x \in [0,1]$: $\quad F(x) = \displaystyle\int^0 f\,dt + \int^x e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x} + 1$

$\circ\ x \in [0,1]$: $\quad F(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f\, dt}_{\substack{F(0) \\ \| \\ 0}} + \int_0^x e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x} + 1$

$\circ\ x \geq 1$: $\quad F(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{1} f}_{\substack{F(1) \\ \| \\ -e^{-1}+1}} + \underbrace{\int_1^x \frac{4}{t^2}\, dt}_{\substack{\| \\ \left[-\frac{4}{t}\right]_1^x}}$

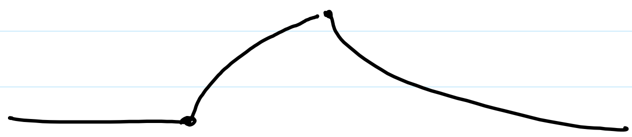
$$= 1 - e^{-1} - \frac{4}{x} + 4 = 5 - e^{-1} - \frac{4}{x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{se } x \in [0,1] \\ 5 - e^{-1} - \frac{4}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Osserviamo che F è:

- continua
- C^1 su $]-\infty, 0]$, su $[0,1]$, $[1, +\infty[$

$F'_-(0) = 0 \quad , F'_+(0) = \left(1 - e^{-x}\right)'_{x=0} = 1 \Rightarrow F$ non der. in 0



VARIABILI CONTINUE

DEF. X v.a. è continua se F_X è continua e $\mathcal{C}^1$ a tratti.
In tal caso F_X è derivabile ovunque eccetto al più un numero finito di punti:

$$f_X(x) := F_X'(x) \quad \text{(dove esiste)}$$

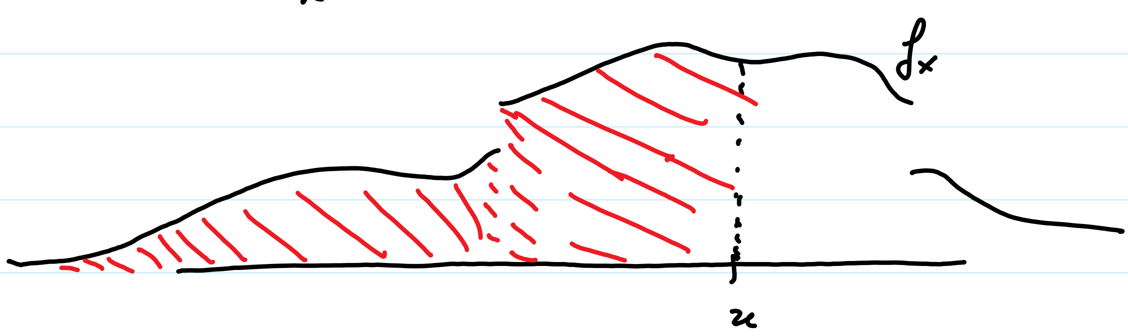
si chiama la densità (continua) di X.

Proprietà.

1) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$.

Infatti: $F_X(x) - \underbrace{F_X(a)}_{\substack{a \to -\infty \\ 0}} = \int_a^x f_X(t)\,dt$

$$\underbrace{\lim_{a \to -\infty} (F_X(x) - F_X(a))}_{F_X(x).} = \lim_{a \to -\infty} \int_a^x f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$



2) $f_X(x) \geq 0$: infatti $F_X'(x) = f_X(x)$ e F_X è crescente $\Rightarrow F_X'(x) \geq 0 \Rightarrow f_X(x) \geq 0$.

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$:

Da 1): $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{x\to+\infty} F_X(x)}_{=1} = \lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt.$$

OSS. $P(X \in (a,b)) = \int_a^b f_X(t)dt$.

Infatti $P(X\in(a,b)) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)dt$.

$P(X=a) = \int_a^a f_X(t)dt = 0$.

OSS: La def di v.a. continua non è la più generale.
Importante: X continua $\not\Leftrightarrow$ F_X è continua.

Esercizio. Sia $f(x) = \begin{cases} c\,x e^{-x/2} & x>0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

1) Per quale $c>0$ f è la densità di una variabile continua X
2) Determinare la funzione di distribuzione di X
3) Calcolare $P(X \in [3,4[)$

1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt +$$

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} c\,t e^{-t/2}\,dt$$

$$\int t e^{-t/2}\,dt = -2t e^{-t/2} + \int 2 e^{-t/2}\,dt$$

$$= -2t e^{-t/2} - 4 e^{-t/2} + \text{Cost.}$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{+\infty} t e^{-t/2}\,dt = \left[-2t e^{-t/2} - 4 e^{-t/2}\right]_{0}^{+\infty} = 4$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 4c = 1 \iff \boxed{c = \frac{1}{4}}$$

b) $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

- $x \le 0$ $\quad F_X(x) = 0$
- $x \ge 0$ $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f}_{0} + \int_{0}^{x} f$

$$= \int_0^x t e^{-t/2}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\left[-2te^{-t/2} - 4e^{-t/2}\right]_0^x = \frac{1}{4}\left(-2xe^{-x/2} - 4e^{-x/2} + 4\right)$$

c) $P(X \in [3,4[) = F_X(4) - F_X(3)$

$$= \left[\frac{1}{4}\left(-2xe^{-x/2} - 4e^{-x/2} + 4\right)\right]_3^4 = \dots$$

Esercizio Sia X v.a. con funzione di distribuzione

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & x<0 \\ \frac{1}{2} + x & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dire se X è continua; calcolare la densità di X in caso affermativo.

F_X è $\mathcal{C}^1$ a tratti e continua $\Rightarrow$ X è variabile aleatoria continua.

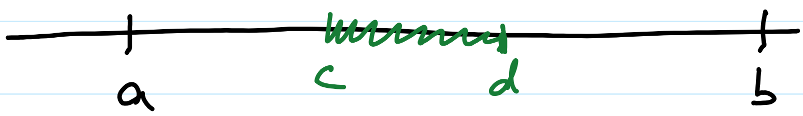
Densità (continuo) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \underline{\underline{x<0}} \\ 1 & \text{se } x \in]0, \frac{1}{2}[\\ 0 & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

LA VARIABILE UNIFORME

"Colpire a caso un punto dell'intervallo $[a,b]$"

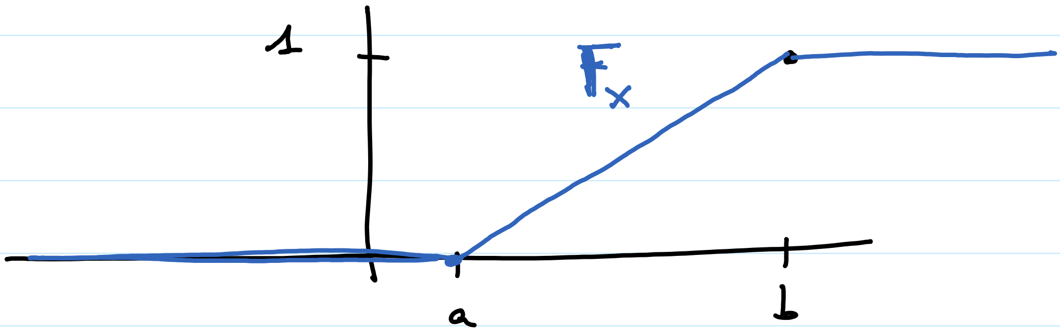
X = v.a. uguale al punto colpito.

$$P(X \in [c,d] \subseteq [a,b]) = \frac{d-c}{b-a}$$



Calcoliamo $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$:

- $x < a$ $\quad F_X(x) = P(X \leq x) = 0$
- $x \in [a,b]$ $\quad F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \in [a,x]) = \frac{x-a}{b-a}$
- $x \geq b$ $\quad F_X(x) = P(X \leq x) = 1$



F_X è $\mathcal{C}^1$ a tratti e continua $\Rightarrow$ X è v.a. CONTINUA.

La sua densità è $f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{se } x \in]a,b[\\ 0 & \text{se } x > b \end{cases}$.

Si dice che X è uniforme su $[a,b]$, e si scrive $X \sim U(a,b)$

ESEMPIO. X variabile continua con densità continua.

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & \text{se } x \in [-1,1] \\ \dots \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & \text{se } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$ continua.

- trovare c
- $P(X > \frac{1}{2})$
- Determinare $F_X(x)$.

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$: $\quad c\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = 1$

$$\Rightarrow \quad 1 = 2\left(\int_0^1 1-x^2\,dx\right)c$$

$$1 = c\,2\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\cdot \frac{2}{3}c = \frac{4}{3}c$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{3}{4}}$$

2) $P(X > \frac{1}{2}) = \int_{1/2}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{3}{4}(1-x^2)\,dx = \dots$