

Variabili continue

variabile uniforme, esponenziale, valori attesi, varianza

ESERCIZIO Sia X v.a. di densità $f_X(x)$. (F_X di classe C^1)

Dire se $Y = e^{2X-5}$ è variabile continua;
determinarne la densità in caso affermativo.

Soluzione. $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^{2X-5} \leq y)$

- Se $y \leq 0$ l'equazione $e^{2X-5} \leq y$ non ha soluzione: $F_Y(y) = 0$
- Se $y > 0$ l'equazione $e^{2X-5} \leq y$ equivale a

$$2X - 5 \leq \log y \Rightarrow X \leq \frac{5 + \log y}{2}$$

$$P(Y \leq y) = P\left(X \leq \frac{5 + \log y}{2}\right) = F_X\left(\frac{5 + \log y}{2}\right)$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ F_X\left(\frac{5 + \log y}{2}\right) & y > 0 \end{cases}.$$

F_Y è C^1 a tratti e continua:

- F_Y è continua: $\lim_{y \rightarrow 0^+} F_Y(y) = 0 = \lim_{y \rightarrow 0^-} F_Y(y)$,
- F_Y è C^1 su $] -\infty, 0[$ e su $]0, +\infty[$

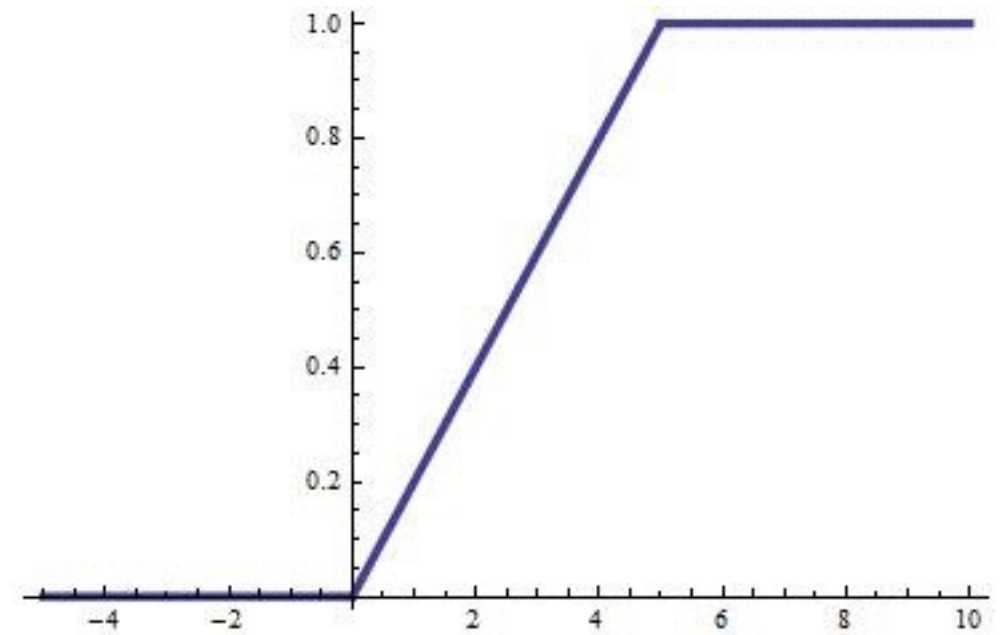
Quindi Y è continua.

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{5 + \log y}{2}\right) = \frac{1}{2y} f_X\left(\frac{5 + \log y}{2}\right), & y > 0 \end{cases}.$$

La variabile uniforme su $[a,b]$

Siano $a < b$. Sia X v.a. tale che

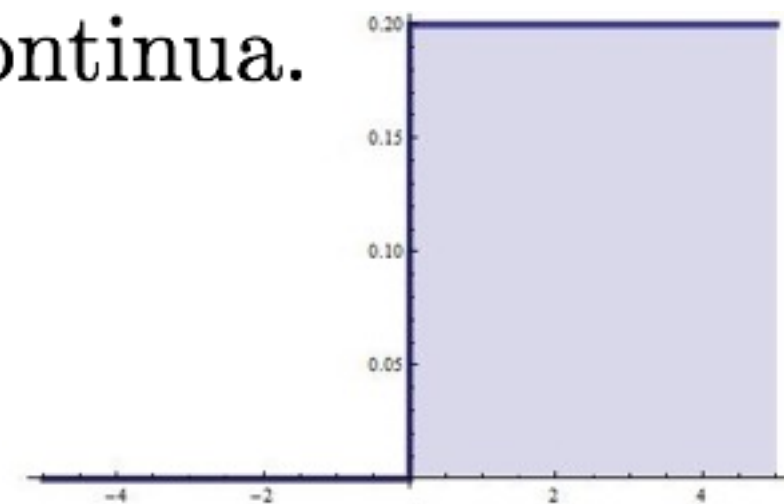
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 1 & x > b. \end{cases}$$



F_X è continua e C^1 a tratti: X è continua.

Densità continua

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



Densità di $U(0,5)$

$$X \sim U(a, b)$$

Esercizio

Abbiamo una SIM sulla quale è stata fatta una ricarica da 5 euro; non ne conosciamo il credito al momento. Dobbiamo scaricare un video, per un costo di 2 euro di traffico.

Ritenendo che il credito a disposizione sia una variabile uniforme, qual è la probabilità di farcela?

Sol

X = credito disposizione. $X \sim U(0, 5)$

$$P(X > 2) = P(X \in [2, 5]) = \frac{5 - 2}{5} = \frac{3}{5}$$



Siamo riusciti a scaricare il video (2 euro di traffico).

Qual è la probabilità di disporre di almeno altri 2 euro di traffico?

$$P(X > 4 | X > 2) = \frac{P(X > 4)}{P(X > 2)} = \frac{P(X \in [4, 5])}{P(X \in [2, 5])} = \frac{1/5}{3/5} = \frac{1}{3}$$

La Variabile esponenziale di parametro λ

$\{X_t\}_{t>0}$ processo di Poisson di intensità λ .

X_t = numero di fenomeni di un certo tipo che si realizzano in un intervallo di t secondi.

T = istante nel quale si realizza il primo fenomeno.

OSS Se $t \geq 0$, $\{T > t\} = \{X_t = 0\}$

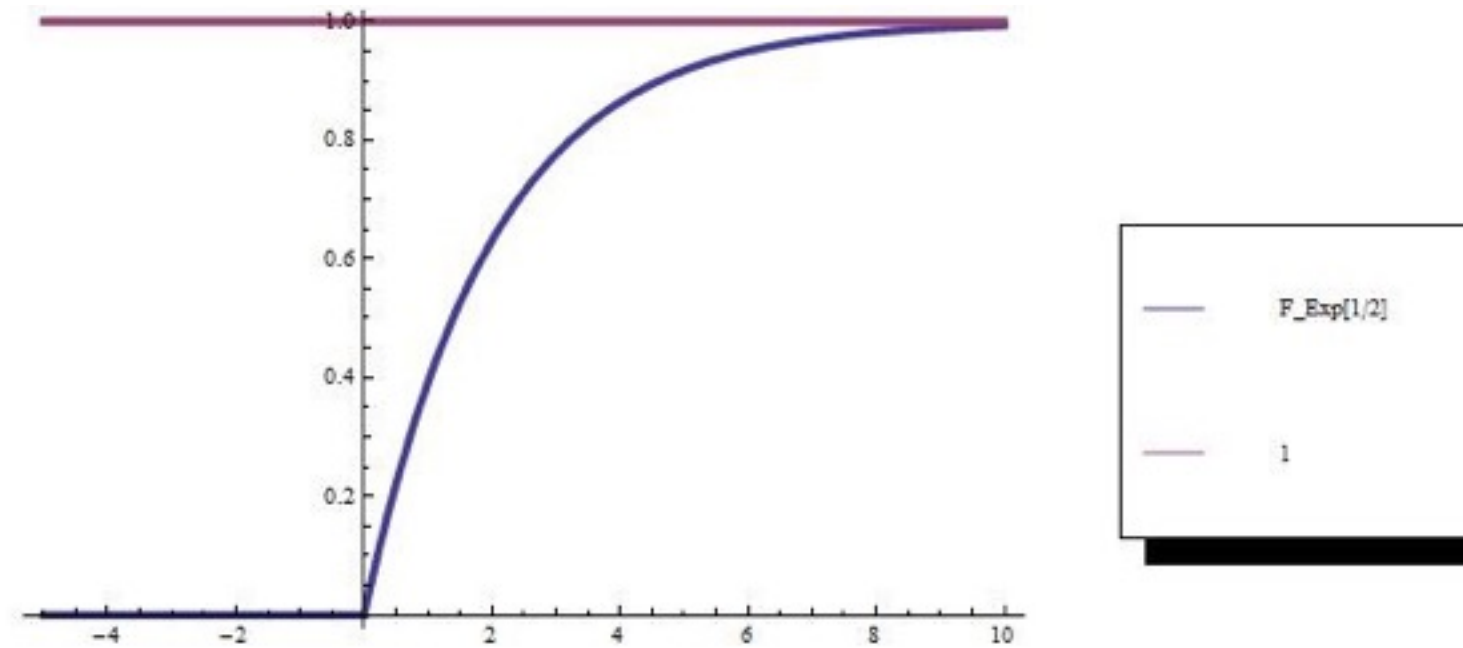
Funzione di distribuzione di T ?

- $t < 0$: $F_T(t) = 0$

- $t \geq 0$: $F_T(t) = P(T \leq t)$

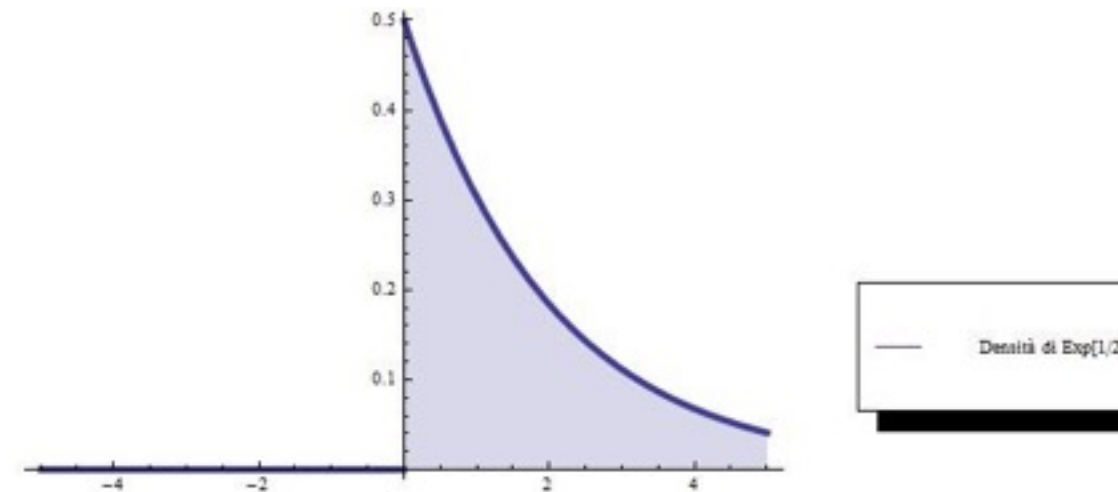
$$= 1 - P(T > t) = 1 - P(X_t = 0) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$F_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0. \end{cases}$$



Densità

$$f_T(t) = F'_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0. \end{cases}$$



Una variabile continua con tale densità o distribuzione si chiama variabile esponenziale di parametro λ : $T \sim \text{Exp}(\lambda)$

OSSERVAZIONE Sia $T \sim \text{Exp}(\lambda)$.

- se $t \geq 0$

$$P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$$

- Assenza di memoria della variabile esponenziale.

Se $s, t \geq 0$,

$$\begin{aligned} P(T > t + s | T > s) &= \frac{P(T > t + s)}{P(T > s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} \\ &= e^{-\lambda t} = P(T > t) \end{aligned}$$

Esempio

Il numero di terremoti di magnitudo tra 7 e 8 Richter nel mondo è descritto da processo di Poisson di intensità 15/anno.

- a) qual è la probabilità che per un mese non capitino terremoti di questo tipo?
- b) per un mese non si sono verificati terremoti di questo tipo. Qual è la probabilità che non si realizzino terremoti di questo tipo nei due mesi successivi?

Sol T = tempo di attesa del primo terremoto (in mesi).

$$T \sim \text{Exp}(15/12)$$

a) $P(T > 1 \text{ mese}) = e^{-15/12} \approx 0.2865$

b) $P(T > 3 \text{ mesi} | T > 1 \text{ mese}) = (T > 2 \text{ mesi}) = e^{-2 \frac{15}{12}} \approx 0.0820$

Valore atteso di una variabile aleatoria continua

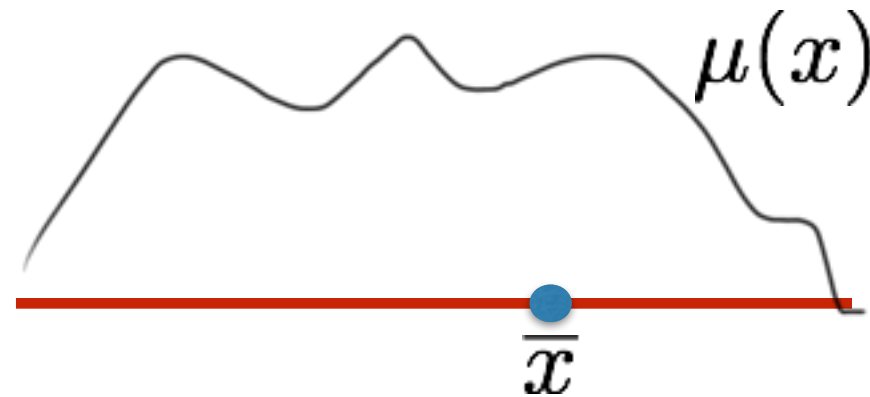
ripasso di Analisi

Segmento $[a, b]$ di densità lineare $\mu(x)$.

Supponiamo la massa totale $\int_a^b \mu(x) dx = 1$

baricentro:

$$\bar{x} = \int_a^b x \mu(x) dx$$



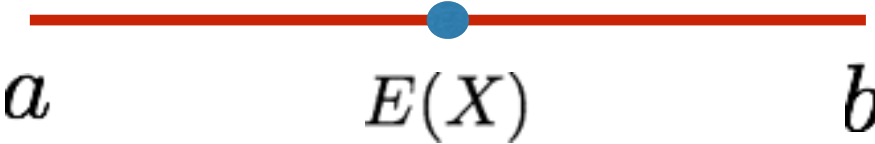
DEFINIZIONE X v.a. continua con densità f_X .

Supponiamo $|x|f_X(x)$ integrabile in senso generalizzato.

Il valore atteso $E(X)$ di X è

$$E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

ESEMPIO (valore atteso di una uniforme) $X \sim U(a, b)$

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$


$|x|f_X(x)$ nulla fuori di $[a, b]$ quindi integrabile su $\mathbb{R}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{a+b}{2}$$

Esempio (valore atteso di una esponenziale)

$$X \sim \text{Exp}(\lambda) \quad f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$x f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda x e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}, \quad x f_X(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx &= \overset{\text{p. parti}}{\left[-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty}} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} \left[e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda^2}: \quad \boxed{E(X) = \lambda \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.} \end{aligned}$$

Valore atteso di composte $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, X v.a. continua.

Esista finito $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f_X(x) dx$.

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

APPLICAZIONE

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b) f_X(x) dx. \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx \\ &= aE(X) + b. \end{aligned}$$

Continuano a valere le proprietà del valore atteso di v.a. discrete

VARIANZA $Var(X) = E[(X - E(X))^2]$,
esiste finita se $E(|X|), E(X^2)$ esistono.

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

OSSERVAZIONE $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx \quad (g(x) = x^2)$

ESEMPIO (varianza di una v.a. uniforme) $X \sim U(a, b)$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b \\ &= \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{12} (a^2 - 2ab + b^2) = \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

