VARIABILI ALEATORIE

Una variabile aleatoria su (Ω, P) è una funzione $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

ESEMPIO. $\Omega = \{(T,T), (T,C), (C,T), (C,C)\}$

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ $\qquad X(x,y) = \#$ di Teste in (x,y)

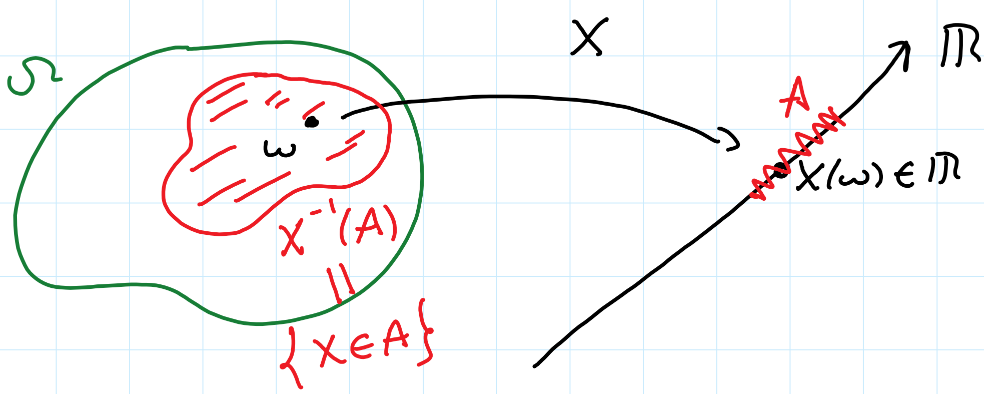
ESEMPIO Si lanciano due dadi, ci interessiamo alla probabilità che la somma assuma i suoi valori

$\Omega = \{(x,y): x,y \in \{1,..,6\}\}$

$\forall (x,y) \in \Omega$ $\qquad X(x,y) = x+y$, è una variabile aleatoria.

$X: \Omega \to \mathbb{R}$

NOTAZIONI $A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$



DEF. $P(X \in A) := P(\{X \in A\})$; $\quad P(X = a) := P(\{\omega : X(\omega) = a\})$.

la legge di X

la legge di X

P è prob. su Ω $\quad X$ è v. aleatoria, la legge di X è la funzione

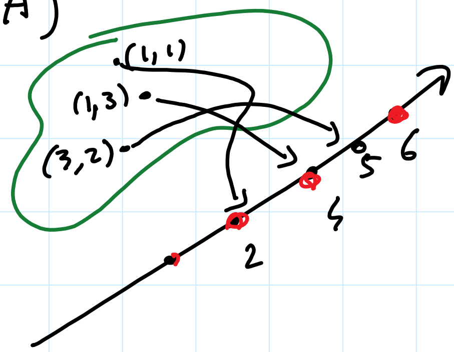
$$A \subseteq \mathbb{R} \longmapsto P(X \in A)$$

Es. $\Omega = \{(x,y),\ x,y \in \{1,..,6\}\}$

$X(x,y) = x+y$

Prob. che la somma sia pari

$P(X \in \{2,4,6,\dots\})$



La legge di X si indica con P_X

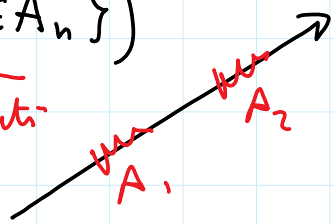
PROP. P_X è una probabilità su $\mathbb{R}$.

Dim.

- $P_X(\emptyset) = P(X \in \emptyset) = P(\emptyset) = 0$
- $P_X(\mathbb{R}) = P(X \in \mathbb{R}) = 1$

$(A_n)_n$ $\quad A_n \subseteq \mathbb{R}$ a due a due disgiunti

$$P_X\left(\bigcup A_n\right) = P\left(X \in \bigcup_n A_n\right) = P\left(\underbrace{\bigcup_n}_{\text{disgiunti}} \{X \in A_n\}\right)$$



$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(X \in A_n) = \sum P_X(A_n). \qquad \#$$

Es. $\Omega_1 = \{(x,y),\ x,y \in \{1,..,6\}\}$ dado equilibrato.

$X_1(x,y) = \#$ di 6

$\Omega_2 = \{(T,T), (T,C), (C,T), (C,C)\}$ Moneta Testa con prob $\frac{1}{6}$.

$X_2(a,b) = \#$ di teste in (a,b)

$P^1((x,y)) = \frac{1}{36}$

$P^1((x,y)) = \frac{1}{36}$

$P^1_{X_1}(1) = P^1(1 \text{ solo } "6") = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$ $\qquad P^1_{X_1}(2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2$

$P^1_{X_1}(0) = P^1(\text{nessun } 6) = \left(\frac{5}{6}\right)^2$

$P^1_{X_1}(x) = 0$ se $x \neq 0, 1, 2.$

$P^2((T,C)) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}, \quad P^2(T,T) = \frac{1}{6^2}, \quad P^2(C,C) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \ldots$

$P^2_{X_2} = P^1_{X_1}$

ESEMPI DI VARIABILI ALEATORIE

- Variabili costanti : $X \equiv c$

$$P_X(A) = P(X \in A) = \begin{cases} 0 & \text{se } c \notin A \\ 1 & \text{se } c \in A. \end{cases}$$

- Variabile di Bernoulli

X che assume solo i valori $\{0,1\}$.
Se $p = P(X=1)$ si dice che X è variabile di Bernoulli di parametro p: $\boxed{X \sim Be(p)}$

<u>Es</u>. Moneta Testa con probabilità p

$T \longrightarrow X = 0$ $\qquad \Omega = \{T, C\} \xrightarrow{X} \mathbb{R}$

$C \longrightarrow X = 1$ $\qquad T \longmapsto 1$

$\qquad C \longmapsto 0$

$P(X=1) = P(\text{Testa}) = p$

$P(X=0) = P(\text{Croce}) = 1-p$

- Esperimento di Bernoulli:
  L'esito è costituito da successo/insuccesso.

ES: Lancio di una moneta; $X = \begin{cases} 1 & \text{con prob. } p \\ 0 & \text{con prob } 1-p \end{cases}$

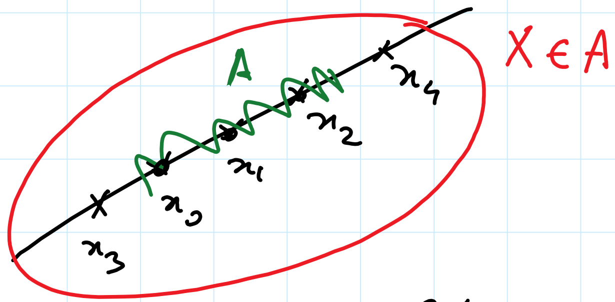
$X \sim Be(p)$

$$\begin{cases} P_X(0) = 1-p \\ P_X(1) = p \end{cases}$$

$P_X(A) = P(X \in A)$ dipende solo dal fatto che A contenga 0 o 1.

- Variabile aleatoria discreta.

Assumono al più una infinità numerabile di valori $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$



La legge di X è individuata dalla probabilità $p_i = P(X = x_i)$.

$$A \subseteq \mathbb{R} \qquad P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} P(X = x_i) = \sum_{x_i \in A} p_i$$

ES. X assume i valori $1, 2, 3$

$$1 \to 3/8, \quad 2 \to 4/8, \quad 3 \to 1/8$$

$$P_X(A) = P(X \in A)$$

$$P_X([3/2, 10]) = P(X \in [3/2, 10]) = P(X = 2 \text{ o } X = 3)$$
$$= P(X = 2) + P(X = 3)$$
$$= 4/8 + 1/8$$

La densità discreta di X è la funzione

La <u>densità discreta</u> di X è la funzione

$$a \in \mathbb{R} \longmapsto P(X=a) \in [0,1]$$

Riassunto. X v.a. su Ω $\quad X:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

Legge di X è la probabilità $P_X : A \subseteq \mathbb{R} \longmapsto P(X\in A)$

Se X è discreta la legge di X è determinata dalla funzione

$$\underbrace{a \in \mathbb{R} \xmapsto{p_X} P(X=a)}_{\text{densità discreta di } X}.$$

ES. Dado con 6 facce, equilibrato

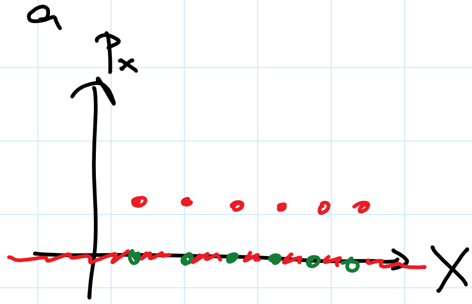
$X=$ esito del lancio.

$\Omega = \{1,2,\dots 6\}$ $\qquad X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad a \longmapsto a$

Densità discreta di X

Se $a \neq 1,2,3,4,5,6$ $\qquad p_X(a)=0$

Se $a \in \{1,2,\dots 6\}$ $\qquad p_X(a)=\frac{1}{6}$



ESEMPIO. X v.a. di Bernoulli di parametro p

Densità discreta

$$p_X(0) = 1-p$$
$$p_X(1) = p$$
$$p_X(a) = 0 \quad \text{se } a \notin \{0,1\}$$

ESEMPIO (Variabile binomiale).

Si effettuano $n \geq 1$ prove di Bernoulli INDIPENDENTI

X = numero di successi nelle n prove

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

DEF. $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $p \in]0,1[$
X è variabile binomiale di parametri (n,p) se

- X assume solo i valori $\{0, 1, \dots, n\}$
- $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

$$X \sim B(n,p)$$

ESEMPIO. Fabbrica di lampadine.
La probabilità che una lampadina sia difettosa è del 10%. Indipendenza dei difetti
Una confezione ha 100 lampadine.

Qual è la probabilità che vi siano almeno 2 lampadine difettose?

Lampadina difettosa sì/NO: prova di Bernoulli di parametro 0.1 (Successo: è difettosa)

100 lampadine: sequenza di 100 prove di Bernoulli di par. 0.1
Prove indipend. $\Rightarrow$
X = # di lampadine difettose nella scatola con 100 lampadine

è v.a. binomiale

$X \sim B(100, 0.1)$.

$$P(X \geq 2) = \sum_{k=2}^{100} P(X=k) = \sum_{k=2}^{100} \binom{100}{k} (0.1)^k (1-0.1)^{100-k}$$

$$= 1 - P(X<2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

$$= 1 - \binom{100}{0} (0.1)^0 (1-0.1)^{100} - \binom{100}{1} (0.1)^1 (1-0.1)^{99}$$

ESERCIZIO. Se $X \sim Ge(p)$ $\boxed{P(X > k) = (1-p)^k}$

ESTRAZIONE DEL LOTTO

Si estraggono 5 numeri tra $\{1, 2, \ldots, 90\}$

a) Probabilità che il 90 compaia tra i 5 numeri?

b) Sequenza di estrazioni del lotto (indipendenti)
Il 90 NON esce per 100 settimane di fila
Qual è la probabilità che il 90 esca dalla 151-esima settimana in poi?
X = # tentativi da effettuare affinché esca il 90: si è realizzato l'evento $\{X > 100\}$

$$P(X > 150 \mid X > 100)$$