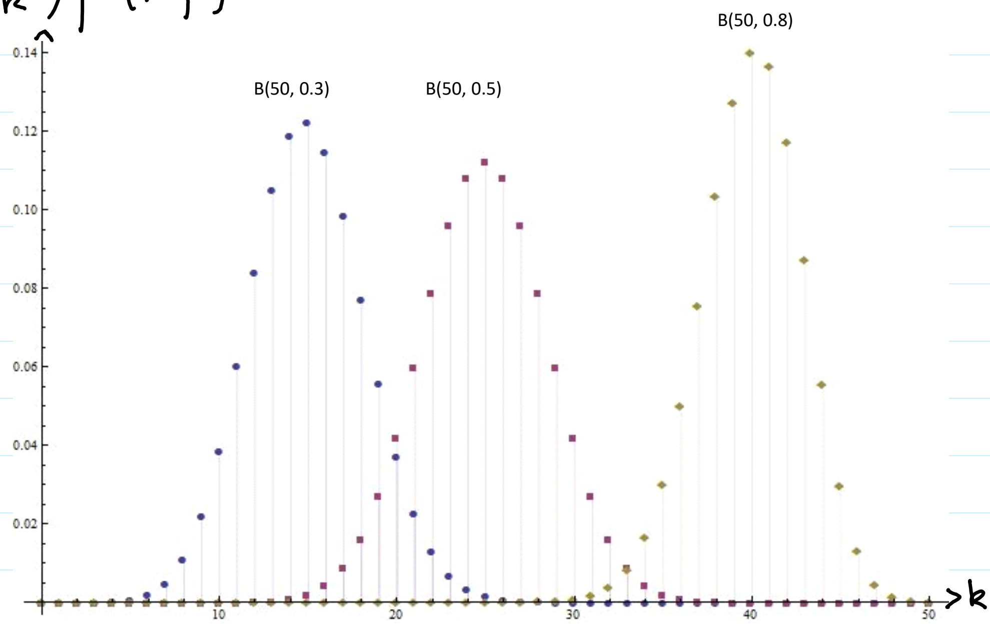
DENSITÀ DISCRETA DELLA VARIABILE BINOMIALE.

- Variabile Binomiale

$$\binom{50}{k} p^k (1-p)^{50-k}$$



- **ESEMPIO.** 10 esperimenti di Bernoulli, indipendenti, ciascuno ha successo con probabilità $\frac{3}{5}$.

$X = \#$ successi in 10 esperimenti: $X \sim$

$$P(X=k) = \binom{10}{k} \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(1-\frac{3}{5}\right)^{10-k}$$

$X = X_1 + \dots + X_{10}$ $\qquad X_i = \begin{cases} 1 \text{ se l'i-esimo è un successo} \\ 0 \text{ se l'i-esimo è un insuccesso} \end{cases}$

$X_i \sim B\left(\frac{3}{5}\right)$

- Si effettuano 10 estrazioni SENZA REIMMISSIONE da un'urna con 100 palline: 60 Rosse, 40 Bianche

Probabilità (Rossa alla estrazione k) = ?

$Y = \#$ palline Rosse estratte

Probabilità (rossa alla estrazione k) = ?

Y = # palline Rosse estratte

$$P(Y=k) = \frac{\binom{60}{k} \times \binom{40}{10-k}}{\binom{100}{10}}$$

$\binom{60}{k} \times \binom{40}{10-k} \longrightarrow$ P. di Moltiplic.

$\binom{100}{10} \longrightarrow \Omega$ = sottoinsiemi di 10 elementi tra 100

Non si tratta della binomiale perché le estrazioni NON sono indipendenti.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i\text{-esima rossa} \\ 0 & \text{se } i\text{-esima bianca} \end{cases} \qquad P(X_i = 1) = \frac{3}{5} \qquad X_i \sim B\left(\tfrac{3}{5}\right)$$

$$X = X_1 + \dots + X_{10}$$

ESERCIZIO. Si effettuano 10 lanci indipendenti di una moneta che dà testa con probabilità p.

Il primo lancio dà Testa. Qual è la probabilità che in tutto escano 7 Teste?

$$P(\text{in tutto } 7 \text{ Teste} \mid 1^a \text{ è Testa}) = \frac{P(7T \cap 1^a \text{ è } T)}{P(1^a\ T)}$$

$P(1^a\ T) \leftarrow p$

$$P(7T \cap 1^a T) = P(1^a \text{ Testa} \cap 6 \text{ Teste nelle successive } 9)$$

$$= P(1^a \text{ Testa}) \times P(6 \text{ Teste nelle } 9 \text{ prove da } 2 \text{ a } 10)$$

$$P(7T \mid 1^a T) = P(6 \text{ Teste in } 9 \text{ prove indipendenti})$$

$$= \binom{9}{6} p^6 (1-p)^3.$$

ESERCIZIO

Supponiamo che un motore di un aereo in volo possa andare in avaria con probabilità pari a 1-p, in maniera indipendente dagli altri motori. Se un aereo ha bisogno di almeno metà dei propri motori per poter concludere il volo senza problemi, per quali valori di p è più sicuro un aereo a 5 motori rispetto a uno a 3 motori?

VARIABILE GEOMETRICA.

Si effettua una successione di prove di Bernoulli INDIPENDENTI, ciascuna delle quali è un successo con probabilità

$p \in]0,1[$.

X = numero di tentativi per avere il primo successo

$k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. $\quad P(X=k) = P(\text{I al } 1^\circ \cap \text{I al } 2^\circ \ldots \cap \text{I al } (k-1) \cap \text{S al } k)$

$$= P(\text{I al } 1^\circ) \times P(\text{I al } 2^\circ) \times \ldots \times P(\text{I al } k-1) \times P(\text{S al } k)$$

$$= \boxed{(1-p)^{k-1} p} \qquad (k \geq 1)$$

DEFINIZIONE. X è variabile geometrica di parametro $p \in]0,1[$ se X ha valori $\{1, 2, \ldots\}$ e $P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$. Si scrive $X \sim Ge(p)$.

$$\boxed{\text{PROP} \quad X \sim Ge(p) \qquad P(X>k) = (1-p)^k}$$

$X \sim Ge(p) \Rightarrow P(X>k) = P\left(\bigcup_{m=k+1}^{\infty} \{X=m\} \right)$

$$= \sum_{m=k+1}^{\infty} P(X=m)$$

$$= \sum_{m=k+1}^{\infty} (1-p)^{m-1} p = p\left[(1-p)^k + (1-p)^{k+1} + \ldots \right]$$

$$= p(1-p)^k \left[1 + (1-p) + (1-p)^2 + \ldots \right] = p(1-p)^k \frac{1}{1-(1-p)}$$

$$= \boxed{(1-p)^k}$$

ES. Dado lanciato più volte, equilibrato, lanci <u>INDIPENDENTI</u>

(a) Qual è la probabilità che servano 10 lanci affinché esca il 6?

(b) Qual è la probabilità che servano $>$ 10 lanci affinché esca il 6?

a) X = # tentativi necessari affinché esca il 6

$$X \sim Ge\left(\frac{1}{6}\right) \qquad P(X=10) = (1-p)^{10-1} p = \left(1-\frac{1}{6}\right)^9 \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^9 \frac{1}{6}.$$

b) $P(X>10) = (1-p)^{10} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$.

Ricordiamo che se $X \sim Ge(p)$ è $P(X>k) = (1-p)^k$

ASSENZA DI MEMORIA DELLA VARIABILE GEOMETRICA

PROP. $X \sim Ge(p)$, $p \in]0,1[$.

$$P(X>k+m \mid X>m) = P(X>k) \qquad (k,m \geq 1)$$

Dim.

$$\frac{P(X>k+m \text{ e } X>m)}{P(X>m)} = \frac{P(X>k+m)}{P(X>m)}$$

$$= \frac{(1-p)^{k+m}}{(1-p)^m} = (1-p)^k = P(X>k) \qquad \#$$

ESERCIZIO (il LOTTO) Si estraggono 5 numeri senza reimmissione da un'urna con 90 numeri.

(a) Qual è la probabilità che tra questi vi sia il 90?

(b) Si effettua una sequenza ripetuta di estrazioni indipendenti di questo tipo.
Il 90 non esce per 50 settimane di fila.
Qual è la probabilità che il 90 esca alla 51-esima estrazione?

(a) Ω = sottoinsiemi di 5 elementi tra 90

A: c'è il 90 $\qquad |A| = \binom{89}{4}$

$$P(A) = \frac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{\frac{89!}{\cancel{85}!\,4!}}{\frac{90!}{\cancel{85}!\,5!}} = \frac{89!}{90!} \times \frac{5!}{4!}$$

$$= \frac{1}{90} \times 5 = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

$$\binom{90}{5} \qquad \frac{90!}{\cancel{85}!\,5!} = \frac{1}{90}\times 5 = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

(b) $X \sim Ge\left(\frac{1}{18}\right) \qquad P(X=51 \mid X>50)$

$$= \frac{P(X=51,\, X>50)}{P(X>50)} = \frac{P(X=51)}{P(X>50)} = \frac{p\cancel{(1-p)^{50}}}{\cancel{(1-p)^{50}}}$$

$$= p = \frac{1}{18}$$

Esperimento con esiti possibili $\{x_1, x_2, .., x_n\} \subseteq \mathbb{R}$

n esperimenti: k_1 volte x_1
k_2 volte x_2
$\vdots$
k_n volte x_n

Media:
$$\frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n}{n}$$
$$\frac{k_1}{n} x_1 + \dots + \frac{k_n}{n} x_n$$

Frequenza del voto x_1

frequenza di x_n

DEF. Sia X v. a. con valori $\{x_1, .., x_n\}$
Il valore atteso (Media) di X è

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + \dots + x_n P(X = x_n)$$

ES. $X \sim B(p)$ $\qquad X = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$

$$E(X) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$$

ES. $X \equiv c \qquad E(X) = c\, P(X = c) = c$

ES. $X \in \{-1, 0, 1\}$

$X = -1$ con prob $\frac{3}{8}$
$X = 0$ con prob $3/8$
$X = 1$ con prob $2/8$

$$E(X) = (-1) \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{2}{8} = -\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = -\frac{1}{8}.$$

DEF. Se X è variabile aleatoria discreta con valori $\{x_0, x_1, \dots\}$ si dice che X ha valore atteso finito se la serie
$$\sum^{\infty} |x_i| P(X = x_i) \text{ converge.}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i| P(X=x_i) \text{ converge.}$$

In tal caso il valore atteso di X è $\boxed{E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X=x_i)}$

ES. $X \sim Ge(p) \quad p \in]0,1[$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} k\,\underbrace{(1-p)}_{x}{}^{k-1}$$

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + 10x^9 = (x + x^2 + \dots + x^{10})' = (1 + x + \dots + x^{10})'$$

Analogamente, se $|x| < 1$

$$(\underbrace{1 + x + \dots + x^n + \dots}_{\frac{1}{1-x}})' = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

$$\Rightarrow 1 + 2(1-p) + \dots + k(1-p)^{k-1} + \dots = \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p^2}$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{1}{p}$$

ES. $X \in \{-1, 0, 1\}$

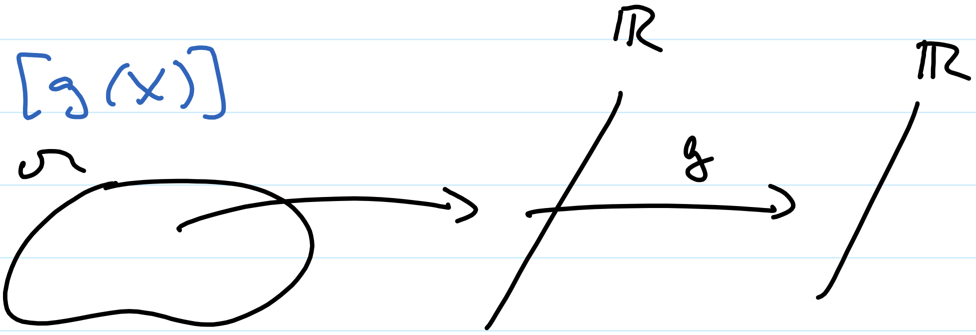
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$E(X^2) \stackrel{?}{=}$$

$$X^2 \begin{cases} 1 & \text{prob} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \\ 0 & \text{prob } \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$E(X^2) = 1 \times \frac{3}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Calcolo di $E[g(X)]$



$$\boxed{E[g(X)] = \sum g(x_i) P(X = x_i)}$$

(X assume i valori $\{x_0, \dots\}$, X discreta)

ES. $X \in \{-1, 0, 1\}$ $\quad P(X=-1) = \frac{1}{4}$, $P(X=1) = \frac{1}{2}$

$$E(X^2) = (-1)^2 P(X=-1) + 1^2 P(X=1) + 0^2 P(X=0)$$
$$= 1\, P(X=-1) + 1\, P(X=1) = \frac{3}{4}.$$