

Una compagnia di assicurazioni emette una polizza che pagherà una certa quantità  $A$  di euro se l'evento  $E$  si verificherà entro un anno. Se la compagnia stima che  $E$  si verificherà entro un anno con probabilità pari a  $p$ , quale dovrebbe essere il costo della polizza per il cliente in modo che il profitto atteso per la compagnia sia del 10 per cento di  $A$ ?

$$P = C - X$$

$X$  = rimborso della compagnia

$$X = \begin{cases} A & \text{se } E \text{ si realizza} \\ 0 & \text{se } E \text{ non si realizza} \end{cases}$$

$$E(P) = C - E(X) \geq 0.1 A$$

$$E(X) = 0 P(X=0) + A P(X=A) = A p$$

$$C - A p \geq 0.1 A \Rightarrow \boxed{C \geq A(p + 0.1)}$$

Una scatola contiene 5 bilie rosse e 5 bilie blu. Estraiamo 2 bilie a caso. Se hanno il medesimo colore, vinciamo 1.10 euro; in caso contrario vinciamo -1.00 euro (cioè perdiamo 1.00 euro). Si calcoli il valore atteso della vincita.

$$X = \text{v. a. vincita} \quad X = \begin{cases} 1.10 \text{ €} \\ -1 \text{ €} \end{cases}$$

$$E(X) = 1.1 P(X=1.1) - 1 P(X=-1)$$

$$P(X=1.1) = P(2 \text{ Rosse}) + P(2 \text{ Blu})$$

$$P(X=1.1) = P(2 \text{ Rosse}) + P(2 \text{ Blu})$$

$$P(2 \text{ Rosse}) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{5!}{3!2!}}{\frac{10!}{8!2!}} = \frac{5 \times 4}{10 \times 9} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

$$P(2 \text{ Blu}) = \frac{2}{9}$$

$$P(X=1.1) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

$$P(X=-1) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(X) &= 1.1 \times \frac{4}{9} - \frac{5}{9} \\ &= \frac{11 \times 4}{90} - \frac{50}{90} < 0 \end{aligned}$$

## VALORE ATTESO DI UNA V.A. DISCRETA

$X$  v.a. con valori  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Si dice che  $X$  ha valore atteso finito se la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| P(X=x_n)$  converge.

$\Rightarrow$  La serie  $\sum x_n P(X=x_n)$  converge e tale somma si chiama VALORE ATTESO di  $X$ ; si indica

$$E(X)$$

PROPRIETÀ.  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X$  v.a. discreta  $\mathbb{R}$  con valori  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$



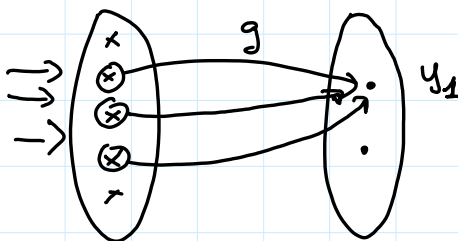
Se la serie  $\sum |g(x_n)| P(X=x_n)$  converge allora

$$E(g(X)) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x_n) P(X=x_n)$$

Dim (nel caso in cui  $X$  ha finiti valori  $x_1, \dots, x_n$ ).

Siano  $y_1, \dots, y_m$  i valori

assunti da  $\underbrace{g(X)}_Y$  ( $m \leq n$ )



$$E(\underbrace{g(X)}_Y) = \sum y_j P(Y=y_j)$$

Fissiamo  $j$ .  $P(Y=y_j)$

$$\{Y=y_j\} = \{g(X)=y_j\} = \{X=x \text{ per qualche } x \text{ t.c. } g(x)=y_j\}$$

$$P(Y=y_j) = \sum_{x: g(x)=y_j} P(X=x)$$

FISSATO

$$\underbrace{y_j P(Y=y_j)}_1 = y_j \sum_{x: g(x)=y_j} P(X=x) = \sum_{x: g(x)=y_j} y_j P(X=x)$$

$$\begin{aligned}
 \underbrace{y_j \cdot \mathbb{1}(Y=y_j)} &= y_j \cdot \mathbb{1}(X=g(x)) = \sum_{x: g(x)=y_j} y_j \cdot \mathbb{1}(X=x) \\
 &= \sum_{x: g(x)=y_j} y_j \cdot P(X=x) = \sum_{x: g(x)=y_j} g(x) P(X=x)
 \end{aligned}$$

$$E(Y) = \sum_j y_j P(Y=y_j) = \sum_j \left( \sum_{x: g(x)=y_j} g(x) P(X=x) \right) = \sum_{x \text{ assunto da } X} g(x) P(X=x)$$

**Corollario.**  $X$  v.a. discreta con valore atteso ben definito.  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$

$$E(aX + b) = a E(X) + b$$

**Dim.**  $g(x) = ax + b$

$X$  assume i valori  $x_0, \dots, x_n, \dots$

$$\begin{aligned}
 E[g(x)] &= \sum_i g(x_i) P(X=x_i) \\
 &= \sum_i (ax_i + b) P(X=x_i) = a \underbrace{\sum_i x_i P(X=x_i)}_{E(X)} + b \underbrace{\sum_i P(X=x_i)}_1 \\
 &= a E(X) + b.
 \end{aligned}$$

Più in generale:

**Prop.** Sia  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X_1, \dots, X_n$  v.a. discrete.

$$E[g(x_1, \dots, x_n)] = \sum g(x_1, \dots, x_n) P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n)$$

(purché la somma della serie converga assolutamente).

ESEMPIO 2 esperimenti di Bernoulli

indipendenti; il primo ha successo con prob  $\frac{1}{8}$   
il secondo con prob  $\frac{1}{5}$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i\text{-esimo esper. è successo} \\ 0 & \text{se } i\text{-esimo esper. è insuccesso} \end{cases}$$

•  $E(X_1 X_2) =$

Modo I: studiamo i valori di  $X_1 X_2$  e calcoliamo la densità discreta di  $X_1 X_2$ .

$$X_1 X_2 = 1 \Leftrightarrow X_1 = 1 \text{ e } X_2 = 1$$

$$P(X_1 X_2 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_1 = 1) P(X_2 = 1) \\ = \frac{1}{5} \times \frac{1}{8}$$

$$E(X_1 X_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{5} \times \frac{1}{8} \cdot 1^2 + 0 = \frac{1}{40}$$

Modo 2.  $E(X_1 X_2) = \sum x_1 x_2 P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$  (formula)  
 $= 1 \cdot 1 \cdot P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{48}$

Corollario.  $X_1, \dots, X_n$  v.a. con valore atteso finito

$$E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$$

Conseguenza importante.

PROPOSIZIONE (Valore atteso di una binomiale)

Sia  $X \sim B(n, p)$ . Allora  $E(X) = np$

Dim. Infatti  $X = X_1 + \dots + X_n$   $X_i \sim B(1, p)$

$$E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = \underbrace{p + \dots + p}_n = np \quad \#$$

OSS: usando la def  $E(X) = \sum_{k=0}^n k P(X=k)$

$$= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \dots = np \text{ (!)}$$

• **ESERCIZIO.** Una urna con  $r$  palline Rosse,  $b$  palline bianche. Estrazione di  $\begin{cases} m < r \\ n < b \end{cases}$  palline senza reimmissione.

$X = \#$  palline rosse in  $n$  estrazioni.

a)  $X$  è binomiale? NO

b)  $E(X) = ? \sum_{k=0}^n k P(X=k) = \sum_{k=0}^n k \frac{\binom{r}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{r+b}{n}}$

Alternativ:  $X = X_1 + \dots + X_n$   $X_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i\text{-esima è Rossa} \\ 0 & \text{se } i\text{-esima è Bianca} \end{cases}$

$E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$ .

$X_i \sim B(p_i)$   $p_i = \text{Prob. che la } i\text{-esima è Rossa}$

$$= \frac{r}{r+b}$$

$$\Rightarrow E(X) = \underbrace{\frac{r}{r+b} + \dots + \frac{r}{r+b}}_n = n \frac{r}{r+b}$$

**ESERCIZIO.**  $n$  persone  $n$  cappelli.

I cappelli vengono presi a caso all'uscita di un locale.

$X = \#$  persone che riprendono il proprio cappello.

Usando la definizione si ha:

$$E(X) = 0P(X=0) + 1P(X=1) + \dots + nP(X=n)$$

Alternativa:  $X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l}'i\text{-esima riprende il cappello} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$X = X_1 + \dots + X_n \quad P(X_i = 1) = \frac{1}{n} \quad E(X_i) = \frac{1}{n}$$
$$\Rightarrow E(X) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

# Funzione di Distribuzione di una Variabile Aleatoria

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

La funzione di distribuzione di  $X$  è la funzione  $F_X: \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$

$$x \longmapsto F_X(x) = P(X \leq x)$$

**OSS:** Se  $X$  è discreta con valori  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\{X \leq x\} = \bigcup_{x_i \leq x} \{X = x_i\}$$

$$P(X \leq x) = \sum_{i: x_i \leq x} P(X = x_i)$$



Funzione di distribuzi...

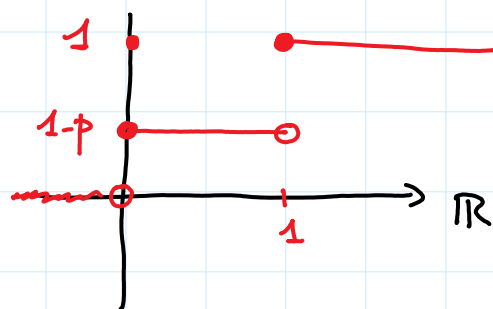
Registrazione audio avviata: 13:18 martedì 13 dicembre 2016

$\Rightarrow$  se  $X$  è v.a. discreta, la densità discreta di  $X$  determina la funzione di distribuzione di  $X$

**ES**  $X$ : Variabile di Bernoulli di parametro  $p \in ]0, 1[$ .

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

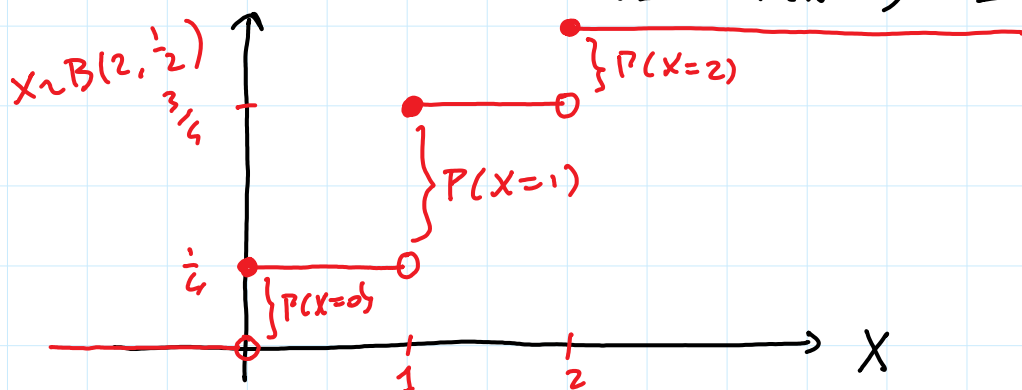
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & x \in [0, 1[ \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$





• ESEMPIO.  $X \sim B(2, \frac{1}{2})$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} x < 0 : 0 \\ x \in [0, 1[ : P(X \leq x) = P(X=0) = \binom{2}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ x \in [1, 2[ : P(X \leq x) = P(X=0) + P(X=1) \\ \quad = \left[\binom{2}{0} + \binom{2}{1}\right] \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \\ x \geq 2 : P(X \leq x) = 1 \end{cases}$$



## PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

$X$  v.a.,  $F_X$  funzione di distribuzione di  $X$ .

1.  $F_X$  è continua a destra in ogni punto

$$\lim_{y \rightarrow x^+} F_X(y) = F_X(x)$$

$$P(X \leq x)$$

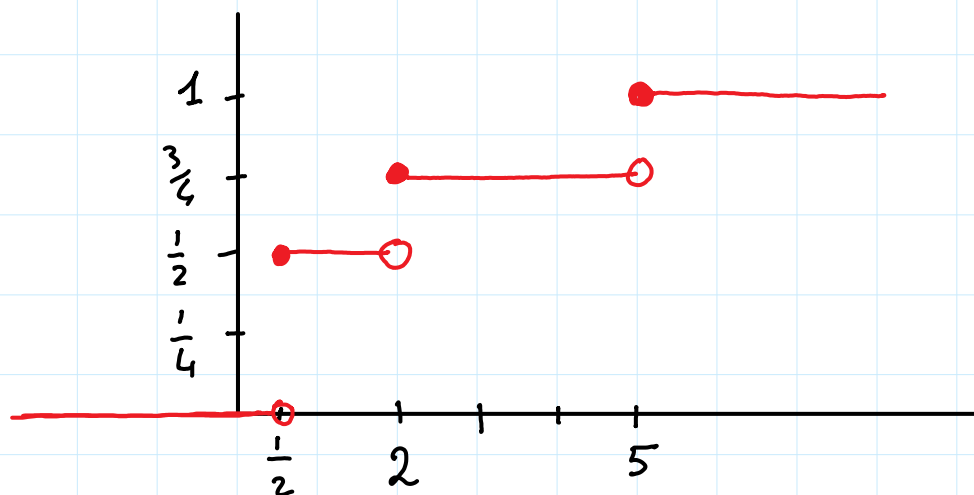
$$P(X \leq y)$$

2.  $F_X$  è crescente ( $x \leq y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$ )

3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$



- **ESEMPIO.**  $X$  v.a. discreta con valori  $\frac{1}{2}, 2, 5$   
il cui grafico della f. di distribuzione è



Determinare la densità discreta di  $X$ .

**CONVERGENZA IN DISTRIBUZIONE.**

$(X_n)_n$  v.a.,  $X$  v.a. Si dice che  $X_n \rightarrow X$  in  
distribuzione se  $F_{X_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

ESEMPIO.  $X_n$  v.a. con valori  $0, 1$ ,  $n \geq 1$

$$P(X_n=0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}; \quad P(X_n=1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$$

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 & \longrightarrow 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} & x \in [0, 1[ & \longrightarrow \frac{1}{2} \\ 1 & x \geq 1 & \longrightarrow 1 \end{cases}$$

Porto  $X = \begin{cases} 0 & \text{con prob } \frac{1}{2} \\ 1 & \text{con prob } \frac{1}{2} \end{cases}$

si ha quindi  $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x) \quad \forall x$ , cioè

$X_n \rightarrow X$  in distribuzione.