





ESEMPIO

Il numero medio di persone che passa alla Stazione di Padova in un dato giorno è $\lambda > 0$

Sia X la v.a. uguale al numero di persone che passano alla Stazione quel giorno.

Calcolare $P(X=k)$, supponendo che le persone vadano indipendentemente alla Stazione

n = numero di utenti potenziali (numero di abitanti del comune, ecc...)

$p = \frac{\lambda}{n}$ probabilità che una data persona passi in Stazione.

$$X_n \sim B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right) \quad P(X_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!} \leftarrow k \text{ termini}$$

$$= \frac{n^k \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!}$$

$$\binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\cancel{n^k} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{\cancel{n^k} k!} \lambda^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} \rightarrow e^{-\lambda}$$

$$\underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}_{\rightarrow 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

$$\left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{n \log\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)} \right]$$

$$\log(1+t) \sim t$$

$$n \log\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \sim n\left(-\frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \underbrace{\binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$P(X_n = k)$$

$$X_n \sim B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$$

OSS: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$

DEF. Si dice che X è variabile di Poisson di parametro $\lambda > 0$ se X assume i valori in $\mathbb{N}$ con $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$$\text{Si scrive } X \sim P_0(\lambda)$$

$$X \sim \text{Po}(\lambda)$$

L'esempio visto all'inizio giustifica la v.d. di Poisson come la "legge delle probabilità piccole".

Abbiamo visto che se $X_n \sim B\left(n, \underbrace{\frac{\lambda}{n}}_{\text{piccolo}}\right)$ allora

$$P(X_n = k) \rightarrow P(X = k), \text{ dove } X \sim P_0(\lambda)$$

Nella pratica, se $X \sim B(n, p)$ p "piccolo" n "grande"

$$\lambda = np \quad P(X=k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{piccolo}}}{\approx} P(Y=k) \quad Y \sim P_0(np).$$

PROPOSIZIONE. $\lambda > 0 \quad X_n \sim B(n, \frac{\lambda}{n}), \quad X \sim P_0(\lambda)$

Allora $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$ in distribuzione.

Dim.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ F_{X_n}(x)}}{P(X_n \leq x)} = \sum_{k \leq x} \underbrace{P(X_n = k)}_{\substack{\downarrow n \rightarrow \infty \\ P(X=k)}} \longrightarrow \sum_{k \leq x} P(X=k) = \underset{\substack{\downarrow \\ F_X(x)}}{P(X \leq x)}$$

Vantaggi nell'approssimare una binomiale con una Poisson.

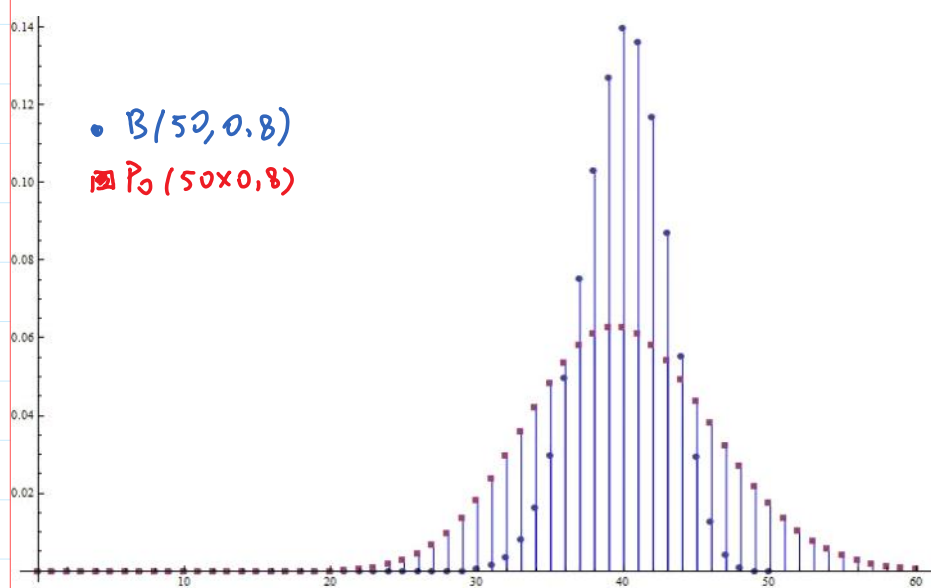
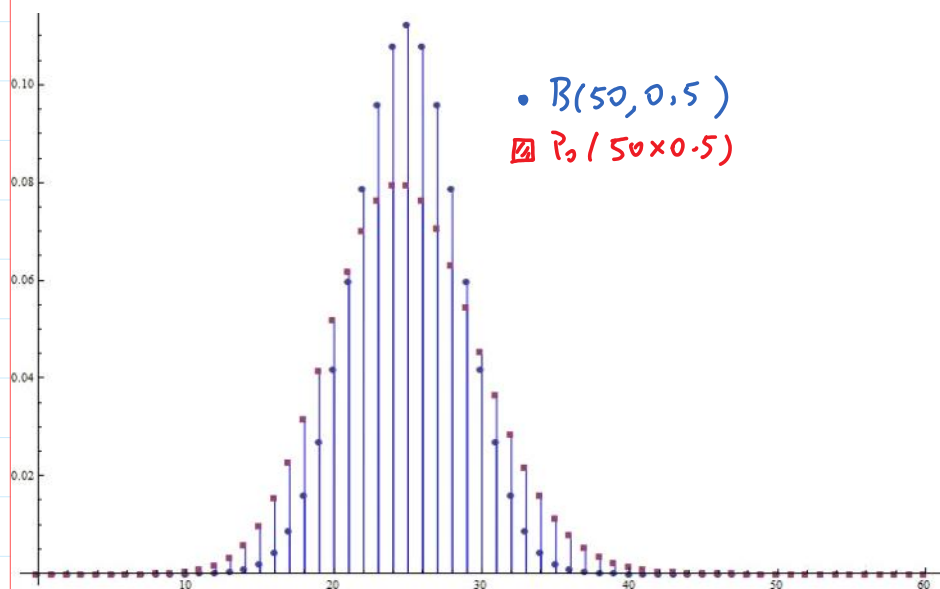
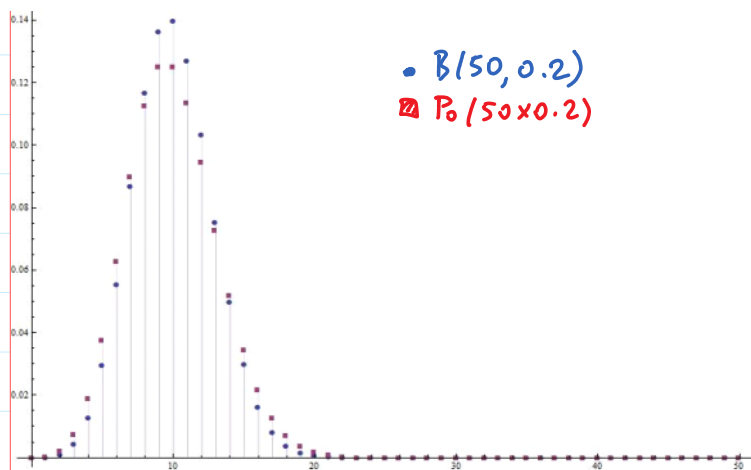
$X \sim B(n, p)$ n molto grande

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{piccolo risp. ad } n \end{matrix} \quad \begin{matrix} \searrow \\ \text{grande} \end{matrix}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \quad \leftarrow \text{valori alti}$$

$\lambda = np \quad Y \sim P_0(\lambda)$

$$P(Y=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{piccolo} \\ \leftarrow \text{piccolo} \end{matrix}$$



ATTENZIONE

$X \sim B(100, 0.1)$ Approssimazione con la Poisson
 è buona solo per valori piccoli di k .
 $Y \sim P_0(100 \times 0.1) = P_0(10)$

Buona approssimazione per k piccolo (n fissato, p piccolo)

Binomial[100, 7] (0.1)^7 (1 - 0.1)^{93} $P(X=7) \approx 0.088...$
 {0.0888952}

N[E^{-10} 10^7 / 7!] $P(Y=7) \approx 0.0900...$
 {0.0900792}

Cattiva approssimazione se k grande rispetto ad n $k=50$

Binomial[100, 50] (0.1)^50 (1 - 0.1)^50 $P(X=50) \approx 5 \times 10^{-24}$
 5.19971×10^{-24}

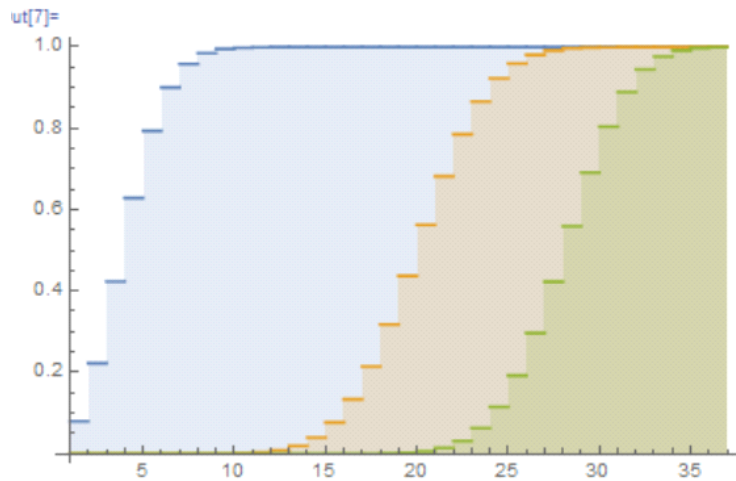
N[E^{-10} 10^{50} / 50!] $P(Y=50) \approx 1.5 \times 10^{-19}$
 {1.49273 \times 10^{-19}}

Binomiale e Poisson (in distribuzione)

martedì 13 dicembre 2016 21:05

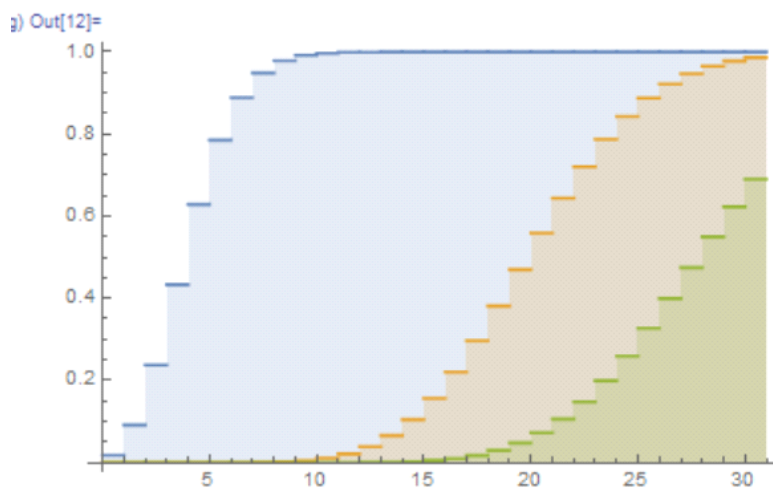
Binomiali di parametro $n = 40$ e $p = 0.1, 0.5, 0.7$

```
In[7]:= DiscretePlot[Evaluate@Table[CDF[BinomialDistribution[40, p], k], {p, {0.1, 0.5, 0.7}}],  
  {k, 36}, ExtentSize -> Right]
```



Poisson di parametro $n \cdot p$, con $n = 40$ e $p = 0.1, 0.5, 0.7$

```
In[12]:= DiscretePlot[Evaluate@Table[CDF[PoissonDistribution[λ], k], {λ, {4, 20, 28}}],  
  {k, 0, 30}, ExtentSize -> Right]
```

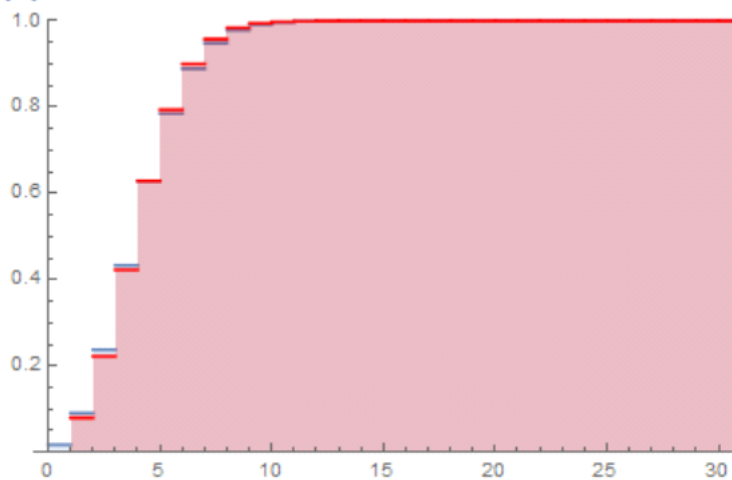


Binomiale B (40, 0.1) confrontata con Poisson P (4)

n[36]:=

Show [A, B]

Out[36]=



ESEMPIO. Linea produttiva produce dei pezzi,
Prob (difettoso) = 1%. Si fanno 1000 pezzi.

Indipendenza dei difetti:

Prob (esattamente 8 sono difettosi) = ?

$X = \#$ pezzi difettosi in 1000 prodotti.

Ipotesi $\Rightarrow X \sim B(1000, 0.01)$

$$P(X=8) = \binom{1000}{8} (0.01)^8 (1-0.01)^{992} \approx 0.1128$$

Consideriamo $Y \sim P_0(1000 \times 0.01) = P_0(10)$

$$P(Y=8) = \frac{10^8}{8!} e^{-10} \approx 0.1126$$

PROCESSO di Poisson.

$\{X_t\}_{t \geq 0}$ è processo di Poisson di
 intensità $\mu > 0$ se $\forall t \quad X_t \sim P_0(\mu t)$
 e per ogni $s < t \quad X_t - X_s \sim P_0(\mu(t-s))$.

Es: # chiamate ad un centralino processo
 di Poisson di parametro 5/minuto

$\Rightarrow X_t = \#$ telefonate tra 0 e il minuto t
 $X_t \sim P_0(5t)$

ES. # telefonate ad un centralino ric
descritto da un processo di Poisson di
parametro 30/ora

- Qual è la probabilità che nei prossimi
3 minuti non arrivi nessuna telefonata?

$$X_{3\text{minuti}} \sim P_o\left(30 \times \frac{3}{60}\right) = P_o\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$P(X_{3\text{minuti}} = 0) = e^{-\frac{3}{2}} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^0}{0!} = e^{-\frac{3}{2}} \approx 22.3\%$$

- Prob che in 5 minuti arrivino almeno
5 telefonate?

$$X_{5\text{minuti}} \sim P_o\left(\frac{5}{60} \times 30\right) = P_o\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} P(X_{5\text{minuti}} \geq 5) &= 1 - P(X_{5\text{min}} < 5) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^4 e^{-\frac{5}{2}} \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^k}{k!} \approx 4.2\% \end{aligned}$$

VALORE ATTESO DELLA Poisson:

$X \sim P_o(\lambda)$	$E(X) = \lambda$
-----------------------	------------------

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right)$$

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \quad \frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
 &= \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!}}_{e^{\lambda}} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda \quad \#
 \end{aligned}$$

L'anno scorso si sono celebrati all'incirca 80 000 matrimoni nello stato di New York. Si stimi la probabilità che almeno una di queste coppie abbia i due partner nati il 30 aprile.

In una coppia $p = \frac{1}{365^2}$ la probab. che siano nati lo stesso giorno

$$X \sim B(80.000, \frac{1}{365^2})$$

$\uparrow$ *n grande* $\uparrow$ *piccolo*

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{80.000}{0} \left(\frac{1}{365^2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{365^2}\right)^{80.000} \end{aligned}$$

$$\lambda = 80.000 \times \frac{1}{365^2} \approx 0.6 \approx 0.45$$

$$\begin{aligned} Y \sim P_0(\lambda) : \quad P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &\approx 1 - P(Y = 0) = 1 - e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = \boxed{1 - e^{-\lambda}} \\ &= 0.45 \end{aligned}$$

Se si acquista un biglietto della lotteria in 50 lotterie diverse, ognuno con una probabilità pari a 1/100 di darci un premio, qual è la probabilità (approssimata) che si vinca un premio almeno una volta?

$$X \sim B(50, \frac{1}{100}) \quad P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$Y \sim P_0(50 \times \frac{1}{100}) = P_0(\frac{1}{2}) \quad P(X \geq 1) \approx 1 - P(Y = 0)$$

VARIANZA DI UNA VARIABILE ALEATORIA.

X variabile aleatoria (discreta) con valore atteso $E(X)$.

$Var(X)$

La varianza di X è $E[(X - E(X))^2]$:

$(X - E(X))^2$ "misura" il quadrato del distacco della variabile X dalla sua media.

ESEMPIO: $X \equiv c$ costante $E(X) = c$ $P(X=c) = 1$

$$(X - E(X))^2 = (X - c)^2 = (c - c)^2 = 0^2 = 0$$

$$E((X - E(X))^2) = E(0) = 0$$

ESEMPIO: variabile di Bernoulli, $X \sim Be(p)$

$$E(X) = p \quad (X - E(X))^2 = (X - p)^2$$

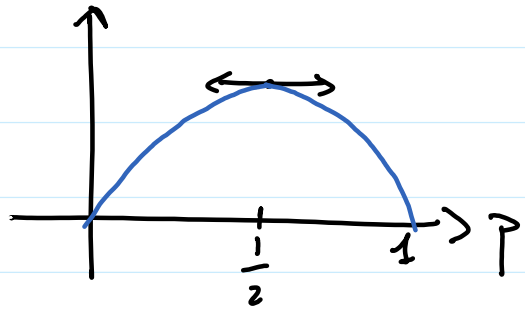
$$(X - p)^2 = \begin{cases} (1-p)^2 & \text{se } X=1 : \text{ con prob. } p \\ (0-p)^2 & \text{se } X=0 : \text{ con prob. } 1-p \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(X-p)^2 &= (1-p)^2 p + p^2 (1-p) \\ &= (1-p)p (1-p+p) = p(1-p). \end{aligned}$$

Altro metodo:

$$E(X-p)^2 = (0-p)^2 P(X=0) + (1-p)^2 P(X=1) \\ = p^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)$$

Varianza massima per $p = \frac{1}{2}$



FORMULA "OPERATIVA" PER LA VARIANZA.

$$\boxed{\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$

Dim. Sia $\mu = E(X)$.

$$\text{Var}(X) = E((X-\mu)^2)$$

$$(X-\mu)^2 = X^2 - 2\mu X + \mu^2$$

$$E(X-\mu)^2 = E(X^2) + E(-2\mu X) + E(\mu^2) \\ = E(X^2) - 2\mu \underbrace{E(X)}_{\mu} + \mu^2 = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - (E(X))^2 \quad \#$$