ESERCIZIO (Lotteria)

Premi previsti:

n. 1	3×10^6 €	n. 5:	100.000 €
n. 1	2×10^6 €	n. 20:	10.000 €
n. 1	1×10^6 €	n. 100:	1.000 €

Venduti: 2×10^6 biglietti
Prezzo è 5 €.

X = vincita acquistando 1 biglietto. Calcoliamo $E(X)$.

$P(X = 3\times 10^6 €) = \boxed{p := \frac{1}{2\times 10^6}}$

$P(X = 2\times10^6) = p = P(X = 1\times 10^6)$

$P(X = 100.000) = 5p$
$P(X = 10.000) = 20p$
$P(X = 1000) = 100p$

$$E(X) = 3\times10^6 \, \overset{p}{P(X=3\times10^6)} + 2\times10^6 \times \overset{p}{P(X=2\times10^6)} + 10^6 \, \overset{p}{P(X=10^6)}$$
$$+\ 100.000 \times \overset{5p}{P(X=100.000)} + 10.000\, \overset{20p}{P(X=10.000)} + 1000\, \overset{100p}{P(X=1000)}$$
$$= 3,4 \text{ €}$$

$$Var(X) = E(X^2) - \underbrace{(E(X))^2}_{(3,4)^2}$$

$$E(X^2) = (3\times10^6)^2 \, P(X = 3\times10^6) + \dots$$

$$Var(X) = 7\times10^6.$$

ESERCIZIO

- Una scatola contiene 5 bilie rosse e 5 bilie blu. Estraiamo 2 bilie a caso. Se hanno il medesimo colore, vinciamo 1.10 euro; in caso contrario vinciamo –1.00 euro (cioè perdiamo 1.00 euro). Si calcoli
  (a) il valore atteso della vincita;
  (b) la deviazione standard della vincita.

X = vincita. Ricordiamo che

$P(X = 1.1) = \frac{4}{9}$; $P(X = -1) = \frac{5}{9}$

a) $E(X) = \frac{4}{9} \times 1.1 - \frac{5}{9} = \frac{4 \times 11}{90} - \frac{50}{90} = -\frac{6}{90} = -\frac{1}{15}$

b) $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$= E(X^2) - \left(\frac{1}{15}\right)^2$

$E(X^2) = (1.1)^2 P(X = 1.1) + (-1)^2 P(X = 1)$

$= (1.1)^2 \frac{4}{9} + \frac{5}{9} = \frac{82}{75}$

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$= \frac{82}{75} - \left(\frac{1}{15}\right)^2 = \frac{49}{45}$.

Supponiamo che la funzione di distribuzione della variabile aleatoria X sia data da

$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{b}{4} & 0 \le b < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{b-1}{4} & 1 \le b < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \le b < 3 \\ 1 & 3 \le b \end{cases}$$

(a) Calcolare $P\{X = i\}, i = 1, 2, 3$.

(b) Calcolare $P\{\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\}$.

VARIANZA.

ESEMPIO. Ω sp. campionario $A \subseteq \Omega$.

$1_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad 1_A(\omega) = 1 \iff \omega \in A$

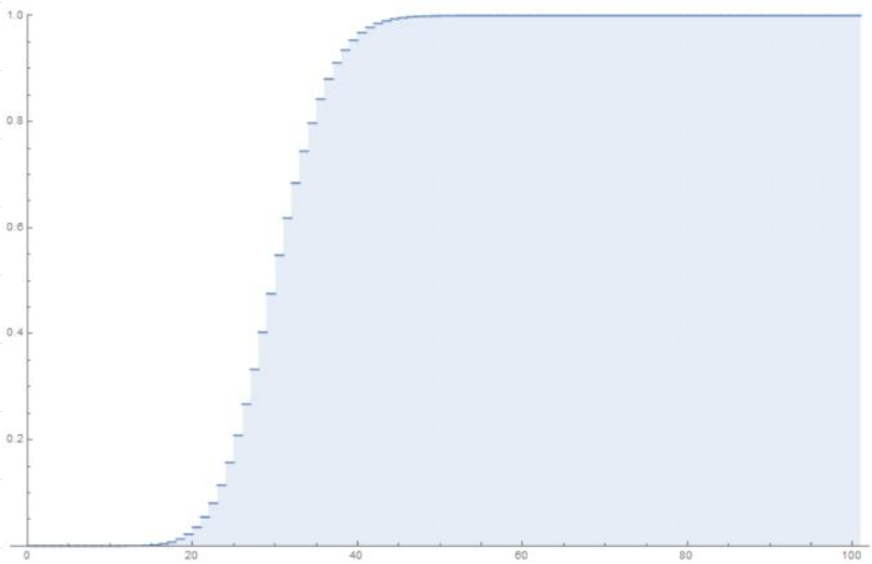
(la variabile vale 1 se A si realizza, 0 altrimenti)

$$1_A = \begin{cases} 1 \text{ se A si realizza} \\ 0 \text{ se A non si realizza} \end{cases} \qquad 1_A \sim B(p) \quad p = P(A)$$

$$\mathrm{Var}\, 1_A = p(1-p) = P(A)(1-P(A)) = P(A)P(A^c)$$

ES. $X \sim Po(\lambda)$ $\quad \lambda > 0$.

Funzione di distribuz.? $F_X(x) = P(X \le x)$; $X \in \mathbb{N}$



PROP. (Varianza di una Poisson)

$$X \sim Po(\lambda) \Rightarrow \mathrm{Var}(X) = \lambda. \qquad (\lambda > 0)$$

Dim. $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (\underbrace{E(X)}_{\lambda})^2$

$$E(X^2) = \sum^{\infty} k^2 P(X=k) = \sum^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}$$

$$\frac{k \lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{d}{d\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \underset{m=k-1}{=} \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{\lambda}$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \lambda e^{-\lambda} \left(\lambda e^{\lambda}\right)' = \lambda e^{-\lambda}\left(e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}\right)$$

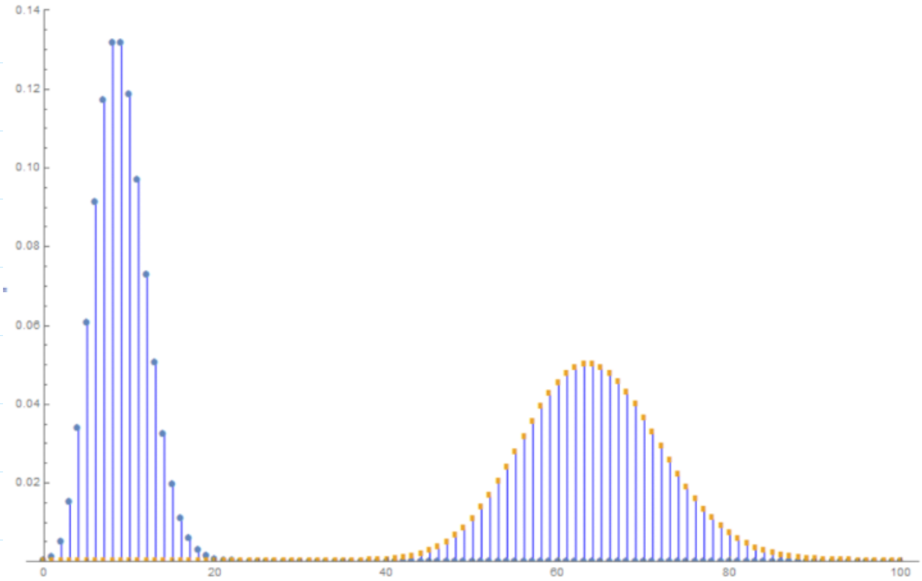
$$= \lambda + \lambda^2$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \lambda^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda. \quad \#$$

CONFRONTO DI VARIANZE

Poisson di parametri 9 e 64. Notare l' effetto della maggiore varianza di Po (64)

```
ListPlot[{Table[{k, PDF[PoissonDistribution[9], k]}, {k, 0, 100}], Table[{k, PDF[PoissonDistribution[64], k]}, {k, 0, 100}]}, Filling -> Axis,
 FillingStyle → {Red, Blue}, PlotMarkers → Automatic, PlotRange → {0, 0.14}]
```



— · —

DEF. Se X è v. a. la deviazione standard di X è $\sigma_X := \sqrt{Var(X)}$

OSS: Se X è una misura, σ_X ha la stessa unità di misura di X

ESEMPIO. $X \sim B(p)$ $\qquad \sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{p(1-p)}$

PROPRIETÀ DELLA VARIANZA.

$a, b \in \mathbb{R}$ $\qquad Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

Dim. $Var(aX+b) = E((aX+b)^2) - (E(aX+b))^2$

$\mu := E(X)$

$$(aX+b)^2 = a^2X^2 + 2abX + b^2$$

$$E((aX+b)^2) = \underline{a^2 E(X^2)} + \underbrace{2ab\,E(X)}_{\mu} + \underline{b^2}$$

$$(E(aX+b))^2 = (a\,E(X)+b)^2$$

$$= (a\mu+b)^2 = a^2\mu^2 + 2ab\mu + b^2$$

$(E(aX+b))^2 = (aE(X)+b)^2$

$= (a\mu+b)^2 = \underbrace{a^2\mu^2} + \underbrace{2ab\mu} + \underbrace{b^2}$

$\Rightarrow Var(X) = a^2 E(X^2) - a^2\mu^2 + 0 + 0 = a^2(E(X^2)-\mu^2)$

$= a^2 Var(X)$ #

OSS: $\boxed{\sigma_{aX} = \sqrt{Var(aX)} = \sqrt{a^2 Var X} = |a|\sqrt{Var X} = |a|\,\sigma_X}$

OSS: In particolare $Var(X+Y) \neq Var(X) + Var(Y)$

Ad esempio $Var(X+X) = Var(2X) = 4\,Var(X)$!

VARIABILE NORMALIZZATA.

X v.a. con $Var(X) \neq 0$.

La variabile normalizzata di X è $\boxed{\dfrac{X-E(X)}{\sigma_X}}$

ES. $X \sim B(p)$. Normalizzata di X? $\boxed{\dfrac{X-p}{\sqrt{p(1-p)}}}$

OSS. $E\left(\dfrac{X-E(X)}{\sigma_X}\right) = \dfrac{1}{\sigma_X} E(X-E(X)) = \boxed{0}$

$Var\left(\dfrac{X-E(X)}{\sigma_X}\right) = \dfrac{1}{\sigma_X^2} Var(X) = \boxed{1}$

Varianza di una SOMMA di VARIABILI ALEATORIE.

Calcolo di $Var(X+Y)$

$Var(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2$

Alternativamente: $E\left[\left(\underbrace{(X+Y) - E(X+Y)}\right)^2\right]$

$E\left[((X-E(X))+(Y-E(Y)))^2\right] \quad \ldots \quad E(\ldots)$

$$E\left[\left((X-E(X))+(Y-E(Y))\right)^2\right] \qquad \mu_X = E(X)$$

$$\mu_Y = E(Y)$$

$$E\left[\left((X-\mu_X)+(Y-\mu_Y)\right)^2\right]$$

$$= E\left[(X-\mu_X)^2+(Y-\mu_Y)^2+2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$$

$$= \underbrace{E(X-\mu_X)^2}_{\text{Var } X} + \underbrace{E(Y-\mu_Y)^2}_{\text{Var } Y} + 2\underbrace{E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y))}_{\text{Cov}(X,Y)}$$

DEF. $\text{Cov}(X,Y) := E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y))$

$\rightsquigarrow \text{Var}(X+Y) = \text{Var } X + \text{Var } Y + 2\,\text{Cov}(X,Y)$

OSS: $\boxed{\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)}$

$$\text{Cov}(X,Y) = E(XY - Y\mu_X - X\mu_Y + \mu_X\mu_Y)$$

$$= E(XY) - \mu_X \underbrace{E(Y)}_{\mu_Y} - \mu_Y \underbrace{E(X)}_{\mu_X} + \mu_X\mu_Y$$

$$= E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

ESEMPIO. Ω sp. campionario, $A, B \subseteq \Omega$.

$1_A, 1_B \qquad E(1_A) = P(A) \qquad E(1_B) = P(B)$

$$\text{Cov}(1_A, 1_B) = E(\underbrace{1_A 1_B}_{1_{A\cap B}}) - \underbrace{E(1_A)}_{P(A)}\underbrace{E(1_B)}_{P(B)}$$

$$= E(1_{A\cap B}) - P(A)P(B)$$

$$= P(A\cap B) - P(A)P(B)$$

$$\text{Cov}(1_A 1_B) > 0 \iff P(A\cap B) > P(A)P(B)$$

$$\iff \frac{P(A\cap B)}{P(A)} > P(B) \qquad (P(A)\neq 0)$$

$$\iff P(B|A) > P(B)$$

VARIABILI ALEATORIE INDIPENDENTI

$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ variabili aleatorie su Ω.
Si dice che le $(X_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ sono v. a. INDIPENDENTI se $\forall (A_\alpha)_\alpha$, $A_\alpha \in \mathbb{R}$ gli eventi

$\{X_\alpha \in A_\alpha\}_\alpha$ sono indipendenti

ES. Successione di esperimenti indipendenti, X_i v.a. relativa agli esiti dell'i-esimo esperimento. Allora $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ sono indipendenti.

OSS: Se $X_1, \dots, X_n$ sono indipendenti

$A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$ sono INDIP.

$$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \times \dots \times P(X_n \in A_n)$$

ES. n esperimenti di Bernoulli con stesso param. p

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ se } i\text{-esimo successo} \\ 0 \text{ se } i\text{-esimo insucc.} \end{cases}$$

Se $X \sim B(n,p) \Rightarrow X = X_1 + \dots + X_n$ e le $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ SONO INDIPENDENTI.

ES. 3 palline Rosse, 2 Bianche.. 2 estrazioni senza reimmissione.

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ se } i\text{-esima estrazione è Rossa} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$P(X_1 = 1) = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $P(X_2 = 1) = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $X_1, X_2 \sim Be\left(\frac{3}{5}\right)$

$X = \#$ Rosse nelle 2 estrazioni $\boxed{X = X_1 + X_2}$

- $P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $P(X_2 = 1) = \frac{3}{5}$

  X_1, X_2 NON sono indip.

- $Cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - \underbrace{E(X_1)}_{3/5}\underbrace{E(X_2)}_{3/5}$

$$E(X_1 X_2) = 1 \cdot 1\, P(X_1 = 1, X_2 = 1)$$
$$= P(X_1 = 1, X_2 = 1)$$
$$= P(X_1 = 1)\, P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)$$
$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$$

$$Cov(X_1, X_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5}\right)$$
$$= \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{-3}{50}$$

PROP (Somma di binomiali indipendenti)
$X \sim B(m, p)$, $Y \sim B(n, p)$ indipendenti
$\Rightarrow X + Y \sim B(m+n, p)$.

Dim. (Provare usando la definizione)
Verifico $P(X+Y = k) = \binom{m+n}{k} p^k (1-p)^{m+n-k}$

$$P(X+Y = k) = P\left\{ \bigcup_{j=0}^{k} \{X = j\} \cap \{Y = k-j\} \right\}$$
$$= \sum_{j=0}^{k} P(X = j, Y = k-j) \ldots$$

ESEMPIO. (SOMMA DI DUE Poisson indipendenti)
Siano $X_1 \sim Po(\lambda_1)$, $X_2 \sim Po(\lambda_2)$ Poisson $\boxed{\text{INDIPENDENTI}}$
Allora $\boxed{X_1 + X_2 \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)}$

Siano $X_1 \sim P_0(\lambda_1)$, $X_2 \sim P_0(\lambda_2)$ Poisson $\boxed{\text{INDIPENDENTI}}$

Allora $\boxed{X_1 + X_2 \sim P_0(\lambda_1 + \lambda_2)}$

Dim. • $X \sim P_0(\lambda) \iff \begin{cases} X \text{ ha valori in tutto } \mathbb{N} \\ P(X=k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k! \end{cases}$

1) $X_1 + X_2 \in \mathbb{N}$ e l'IMMAGINE di $X_1 + X_2$ è $\mathbb{N}$

2) $P(X_1 + X_2 = k) \overset{?}{=} \boxed{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}}$?

$$\{X_1 + X_2 = k\} = \bigcup_{j=0}^{k} \{X_1 = j, X_2 = k-j\}$$

$$P(X_1 + X_2 = k) = \sum_j \underbrace{P(X_1 = j, X_2 = k-j)}_{\text{indip}}$$

$$= \sum_j P(X_1 = j) \times P(X_2 = k-j)$$

$$\sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^j}{j!} \quad e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{k-j}}{(k-j)!}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda_1^j}{j!} \frac{\lambda_2^{k-j}}{(k-j)!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \underbrace{\frac{k!}{j!(k-j)!}}_{\binom{k}{j}} \lambda_1^j \lambda_2^{k-j}}_{(\lambda_1+\lambda_2)^k}$$

#

PROP: Se X, Y sono indipendenti allora $Cov(X,Y) = 0$ cioè $E(XY) = E(X)E(Y)$

$$\Rightarrow \boxed{Var(X+Y) = Var X + Var Y}$$

Dim (X, Y con numero finito di valori)

$x_1, .., x_n$ valori assunti da X

$y_1, .., y_m$ valori assunti da Y.

$$E(XY) = \sum_{i,j} x_i y_j \, \underbrace{P(X=x_i, Y=y_j)}_{\text{INDIP. di } X,Y}$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j \, P(X=x_i) P(Y=y_j)$$

$$= \left(\sum_i x_i P(X=x_i)\right)\left(\sum_j y_j P(Y=y_j)\right)$$

$$= E(X)\, E(Y). \qquad \#$$

PROPOSIZIONE (Varianza di una binomiale)

$$\boxed{\text{Se } X \sim B(n,p) \Rightarrow Var(X) = np(1-p)}$$

Dim. $X = X_1 + .. + X_n \qquad X_i \sim B(p) \quad \{X_i\}_i$ indip.

$Var X = Var X_1 + .. + Var X_n = np(1-p). \qquad \#$

ESERCIZIO. 3 Rosse, 2 Bianche | Estrazione senza reimmissione

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ se } i\text{-esima Rossa} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$X = X_1 + X_2 = \#$ Rosse estratte. $Cov(X_1, X_2) = -3/50$

- $Var(X) = ?$

$$Var(X) = Var X_1 + Var X_2 + 2\, Cov(X_1, X_2)$$
$$= \frac{3}{5}\left(1-\frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5}\left(1-\frac{3}{5}\right) + 2\cdot\left(-\frac{3}{50}\right)$$
$$= \frac{6}{25} + \frac{6}{25} - \frac{6}{50} = \frac{24-6}{50} = \frac{18}{50} = \frac{9}{25}\ . \#$$