Come definire una probabilità?

Probabilità che una moneta dia Testa.

n lanci $\quad f(n)$ = numero di teste in n lanci

$$\frac{f(n)}{n} = \text{frequenza di uscita di T in } n \text{ lanci}$$

Definire $\quad \text{Prob (esce Testa)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n}.$

Ripasso.

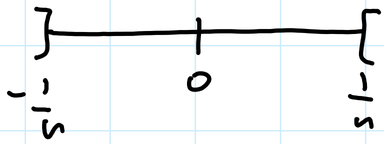
Unioni e Intersezioni di insiemi

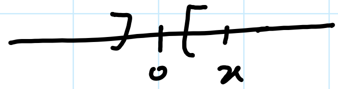
$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\quad \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \{x\in X : x\in A_n \text{ per qualche } n\}.$

$A_n \subseteq X$

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \{x\in X : x\in A_n \text{ per ogni } n\}.$$

Es. $\quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$





SERIE

simbolo

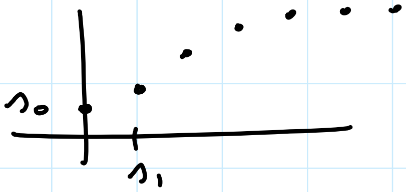
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a S (somma della serie) significa che

$$\lim_{n\to+\infty} (\underbrace{a_0+\dots+a_n}_{\text{SOMMA}}) = S$$

n-esima SOMMA parziale / ridotta n-esima della serie.

Se $a_n \geq 0$ $\quad s_n = a_0 + \dots + a_n$

$\lim_{n\to\infty} s_n$ esiste finito o $+\infty$.



Serie geometrica di ragione q

- $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge se $|q| < 1$, in tal caso $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}}$

$$\Big[(1+q+\dots+q^n)(1-q) = (1+\dots+q^n) - (q+\dots+q^{n+1})$$
$$= 1 - q^{n+1}$$
$$\Rightarrow 1+\dots+q^n \underset{q\neq 1}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \longrightarrow \frac{1}{1-q} \quad |q|<1. \Big]$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge $\left(\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2} \right)$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \cancel{\dots} + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \tfrac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Probabilità.

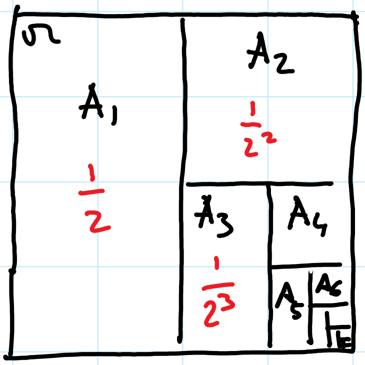
Ω spazio campionario. Una probabilità su Ω è una funzione $P : A \subseteq \Omega \longrightarrow P(A) \in [0,1]$ con le seguenti proprietà:

con le seguenti proprietà:

1) $P(\emptyset)=0, \qquad P(\Omega)=1$

2) $\cancel{P(A\cup B)=P(A)+P(B) \text{ se } A\cap B=\emptyset.}$

$$\Omega=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$$



$$A_i\cap A_j=\emptyset$$

$$P(A_i)=\frac{1}{2^i}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\quad\dots$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\dots\right)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1=P(\Omega)$$

Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una famiglia di eventi a due a due a due disgiunti allora

$$\boxed{P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}P(A_n)}$$

SOMMA di una serie.

Conseguenze.

1) $A\cap B=\emptyset \qquad P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$$A\cup B=A\cup B\cup\emptyset\cup\emptyset\cup\emptyset\dots$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)+\underbrace{P(\emptyset)+P(\emptyset)+\dots}_{0}\;=P(A)+P(B).$$

2) Se $A\subseteq B\Rightarrow P(A)\le P(B)$:

$$B=A\cup(B\setminus A)\Rightarrow P(B)=P(A)+\underbrace{P(B\setminus A)}_{\ge 0}\ge P(A)$$

ESEMPIO. $\{T,C\}=\Omega.\ P(\text{Testa})=60\%$

Esempio. $\{T, C\} = \Omega$. $P(\text{Testa}) = 60\%$

$\Rightarrow P(\text{Croce}) = 1 - P(\text{Testa}) = 40\%$.

$P(\emptyset) = 0$, $P(\{T, C\}) = 1$

Esempio.

$$\Omega = \mathbb{N}$$

Se P è probabilità su Ω,

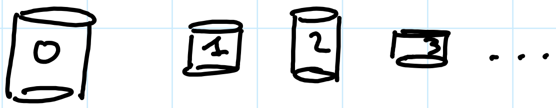
$P(\{n\}) = p_n \in [0, 1]$.

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \{n\} = \mathbb{N} = \Omega \Rightarrow P(\Omega) = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} P(\{n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$$

Definiamo, se $A \subseteq \mathbb{N}$ $P(A) := \sum_{n \in A} p_n$

Si prova che P è una probabilità su $\mathbb{N}$.

È come avere dei pesi



Il "peso" di un insieme di naturali è la somma dei pesi dei numeri che lo compongono

Esempio: $P(n) = \frac{1}{2^{n+1}}$ $n \geq 0$. definisce una probabilità su $\mathbb{N}$

? Si può definire su $\mathbb{N}$ una probabilità in modo

7. Si può definire su $\mathbb{N}$ una probabilità in modo tale che tutti gli elementi di $\mathbb{N}$ abbiano la stessa probabilità?

No: se $P(\{n\}) = p$ — $p=0$: impossibile $\Rightarrow P(\mathbb{N})=0$
— $p \neq 0$: impossibile $P(\mathbb{N}) = \sum_0^{\infty} p = +\infty$

Consideriamo su $\mathbb{N}$ $P(\{n\}) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Consideriamo $A = \{n \text{ è pari}\} \subseteq \mathbb{N}$

Calcolare $P(A)$

DOMANDA preliminare

- $P(\text{esce un numero pari} \leq 8)$

$$P(0)+P(2)+P(4)+P(6)+P(8)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^9}$$

- $A = \{n \text{ è pari}\}$ $\quad P(A)$

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{n : n \text{ pari}\}$$
$$= \bigcup_{k=0}^{\infty} \{2k\}$$

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\{2k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}}$$

$$\frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2^{2k} \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2^2)^k} = \frac{1}{2} \frac{1}{4^k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

SEQUENZE INFINITE

Ω = sequenze infinite di $\{T, C\}$.

Se consideriamo n lanci

$$P(\underbrace{T, T, \dots, T}_{n \text{ lanci}}) = \frac{1}{2^n}$$

$\forall x_1, \dots, x_n \in \{T, C\}$ $\quad P(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2^n}$.

Si può definire nelle sequenze infinite di lanci una probabilità tale che

$P(x_1 \text{ al lancio } 1, \dots, x_n \text{ al lancio } n) = \frac{1}{2^n}$.

Calcolare la probabilità che non esca mai teste?

$E_n = \{$ teste esce la prima volta all'n-esimo lancio $\}$

$P(E_n) = \frac{1}{2^n}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \text{"Esce testa in qualche lancio"} = A$$

$$E_n \cap E_m = \emptyset \quad \text{se } n \neq m.$$

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

$\Rightarrow P(\text{tutte croci}) = 0$

$\Rightarrow P(\text{Tutte Teste}) = 0.$

42. Due dadi sono lanciati assieme n volte. Si calcoli la probabilità che una coppia di 6 appaia almeno una volta? Quanto deve essere grande n affinché questa probabilità sia almeno $\frac{1}{2}$?