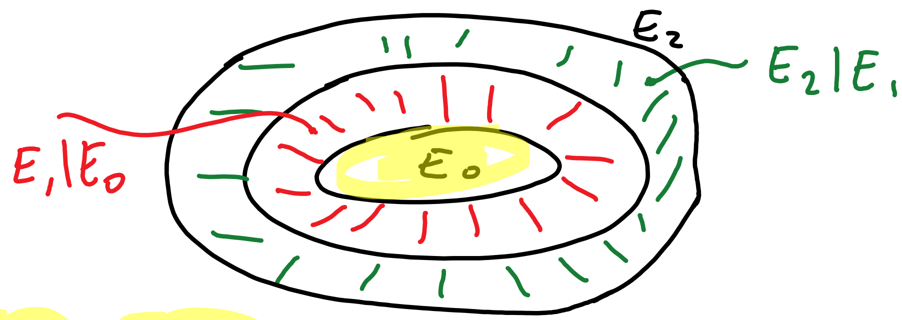
CONTINUITÀ DELLE PROBABILITÀ

1) $E_0 \subseteq E_1 \subseteq \dots \subseteq E_n \subseteq \dots \subseteq \Omega$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{0}^{\infty} E_m\right) = \lim_{n\to+\infty} P(E_n)$$

2) $E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_n \supseteq \dots \Rightarrow P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n\right) = \lim P(E_n)$.

Dim. Si scrive $\bigcup_n E_n$ come una unione di insiemi a due a due disgiunti



$$\bigcup E_n = E_0 \cup (E_1 \setminus E_0) \cup (E_2 \setminus E_1) \cup \dots \cup (E_{n+1} \setminus E_n) \cup \dots$$

$(E_{n+1} \setminus E_n) \cap (E_{m+1} \setminus E_m) = \emptyset$ se $m < n$.

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_n E_n\right) = P(E_0) + P(E_1 \setminus E_0) + P(E_2 \setminus E_1) + \dots$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(P(E_0) + P(E_1 \setminus E_0) + \dots + P(E_n | E_{n-1})\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\cancel{P(E_0)} + (P(E_1) - \cancel{P(E_0)}) + \cancel{\dots} + (P(E_n) - \cancel{P(E_{n-1})})\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} P(E_n)$$

2) $E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_n \supseteq \dots$ $(*)$

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n\right) \stackrel{?}{=}$$

OSS. $\Omega \setminus A \cup B$ $\quad A, B \subseteq \Omega$

$\quad = (\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)$

$(\Omega \setminus A \cap B) = (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$.

$\Omega \setminus \bigcup A_n = \bigcap (\Omega \setminus A_n)$

$\Omega \setminus \bigcap A_n = \bigcup (\Omega \setminus A_n)$.

$\Omega \setminus E_0 \subseteq \Omega \setminus E_1 \subseteq \Omega \setminus E_2 \subseteq \dots$

$$P\left(\bigcup_n (\Omega \setminus E_n)\right) = \lim_n \underbrace{P(\Omega \setminus E_n)}_{1 - P(E_n)}$$

$$= P\left(\Omega \setminus \bigcap_n E_n\right) = 1 - P\left(\bigcap_n E_n\right)$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap E_n\right) = \lim_n P(E_n)$$

ES. Infiniti lanci di una moneta (equilibrato)

$x_i \in \{T, C\}$ $\quad \sigma = (x_1, x_2, x_3, \dots)$

Ad esempio $x_1 = T,\ x_2 = C,\ x_3 = T,\ x_4 = C, \dots$

$(T, C, T, C, T, C \dots)$.

$$P(\sigma) \stackrel{?}{=}$$

E_n = nei primi n lanci si ottiene $(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$

$\{\sigma\} = \bigcap E_n \Rightarrow P(\{\sigma\}) = P\left(\bigcap_n E_n\right)$ $\quad E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$

$$= \lim_n P(E_n) = \lim_n \frac{1}{2^n} = 0.$$

ES. $[0,1]$ $\qquad I \subseteq [0,1]$ $\qquad P(I) = \underbrace{|I|}_{\text{lunghezza}}$

$$P\left(\left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right]\right) = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \forall x \in [0,1] \qquad P(\{x\}) = \text{lunghezza } [x,x] = 0.$

$$P(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \overset{?}{=}$$

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$P(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = P\Big(\bigcup_n \{q_n\}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P(\{q_n\})}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow P(\text{numero irrazionale}) = 1.$

PROBABILITÀ CONDIZIONATE.

Motivazione.

E = esce il 6 nel lancio del dado.

Intuitivamente $P(E)$ si può calcolare lanciando il dado n volte, se $f_E(n) = \#$ di volte che esce il 6 $P(E) \simeq \frac{f_E(n)}{n}$.

F: il lancio ha dato un numero pari

Qual è la probabilità che esca il 6 o il 5

E: esce il 5 o il 6

$f_F(n)$ = numero di lanci nei quali è uscito un numero pari; si conta $f_{E\cap F}(n) = \#$ lanci con esito pari nei quali è uscito il 6 su n lanci

3 4 2 6 1 6 4 5 . . . . 5 n lanci

facce pari: $f_F(n)$

Numero di facce = 6: $f_{E\cap F}(n)$

Prob "esca il 6 sapendo che uscito un num. pari"

$$\simeq \frac{f_{E\cap F}(n)}{f_F(n)}$$

All'inizio F: $P(F) = \frac{f_F(n)}{n}$ $\quad P(E\cap F) = \frac{f_{E\cap F}(n)}{n}$

Q = nuova probabilità (sapendo che è uscito un pari)

$$Q(E) \approx \frac{f_{E\cap F}(n)}{f_F(n)} = \frac{f_{E\cap F}(n)/n}{f_F(n)/n} = \frac{P(E\cap F)}{P(F)}.$$

$$Q(E) \approx \frac{\cdots}{f_F(n)} = \frac{\cdots}{f_F(n)/n} = \frac{\cdots}{P(F)}.$$

DEFINIZIONE. Ω spazio campionario con probabilità P. Sia $F \subseteq \Omega$ con $P(F) > 0$.
La probabilità di $E \subseteq \Omega$ condizionata ad F ("sapendo che F si realizza") è

$$P(E|F) := \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

probabilità di partenza

ESEMPIO. Sia P probabilità uniforme su un insieme finito Ω. $F \subseteq \Omega$, $F \neq \emptyset$

$P(\cdot|F)$ è uniforme su F.

Sia $E \subseteq F$

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{|E \cap F|/|\Omega|}{|F|/|\Omega|}$$

$$= \frac{|E \cap F|}{|F|} = \frac{|E|}{|F|}$$

$=$ prob. unif (su F) di E.

ESEMPIO. Dado non truccato, 6 facce.

E = esce il 6, F: esce un numero pari.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ con probabilità P uniforme

$P(\{1\}) = \ldots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$

$$P(E|F) = \frac{|E|}{|F|} = \frac{1}{3}$$

ESEMPIO. Dado non equilibrato

$P(1)=\frac{\;}{12}$, $P(2)=\frac{\;}{12}$, $P(3)=P(4)=\frac{\;}{12}$, $P(5)=\frac{\;}{12}$, $P(6)=\frac{\;}{12}=\frac{\;}{4}$

P NON è uniforme su $\{1,2,3,4,5,6\}=\Omega$.

$$P(6\mid \text{Numero pari}) = \frac{P(6)}{P(\text{pari})} = \frac{1}{3+2+3} = 1/8$$

$$P(2\mid \text{Numero pari}) = \frac{3}{3+2+3} = 3/8$$

ESEMPIO. 52 carte 4 giocatori Est-Ovest-Nord-Sud

Ogni giocatore ha 13 carte.

Qual è la probabilità condizionata che Est abbia esattamente 3 picche sapendo che Nord+Sud hanno 8 picche?

$$\Omega = \{ (A, B) \qquad \}$$

A: carte di Est: $\quad B$: carte di Nord+Sud

$A \subseteq I_{52}$ $\qquad B \subseteq I_{52}$

$|A| = 13$ $\qquad |B| = 26$

$A \cap B = \emptyset$

Attribuiamo la stessa probabilità ad ogni evento di Ω

F: "Nord+Sud hanno esattamente 8 picche"

$$F = \{ (A, B) : |A| = 13 \quad |B| = 26, \ B \text{ contiene 8 picche}, \ A \cap B = \emptyset \}$$

E: "Est ha esattamente 3 picche"

$$E = \{ (A, B) : \overset{A\cap B=\emptyset}{|A| = 13}, \ |B| = 26, \ A \text{ contiene 3 picche} \}.$$

$$P(E\mid F) = \boxed{\frac{P(E\cap F)}{P(F)}} = \frac{|E\cap F|}{|F|} \qquad (P \text{ è uniforme su } \Omega)$$

$$|F| = \#\left(\text{di } B^{c} \text{ con } |B| = 26 \atop \text{contenenti 8 picche}\right) \times \binom{26}{13}$$

$$E \cap F = \left\{ (A, B) : \underset{A \text{ ha 3 picche}}{|A| = 13}, \ |B| = 26 \text{ el.}, \ 8 \text{ picche} \right\}.$$

$$|E \cap F| = \#\left(\text{di } B \text{ con } |B| = 26 \atop \text{contenenti 8 picche}\right) \times \binom{5}{3} \times \binom{26-5}{10}$$

3 picche tra 5

$$P(E|F) = \frac{\binom{5}{3} \times \binom{26-5}{10}}{\binom{26}{13}}$$

PROBABILITÀ DI INTERSEZIONE DI EVENTI

Probabilità di intersezione di eventi

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \qquad P(F) \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P(E|F)P(F) = P(E \cap F) = P(F|E)P(E)}$$

si tratta di un modo per calcolare la probabilità di una intersezione di eventi

- ESEMPIO. Estrazione di 2 palline, senza reimmissione, da un'urna con 10 Rosse e 5 bianche. P(1ª è Rossa e 2ª è Rossa) = ?

$$P(1^a \text{Rossa}) \times P(2^a \text{ Rossa} \mid 1^a \text{ Rossa})$$

$$\frac{10}{15} \times \frac{9}{14}$$

- ESEMPIO.

F: superare il primo compitino $P(F) = 80\%$

$P(E|F)$ $\quad$ E = superare il II compitino

$$P(E|F) = 90\%$$

$$\underbrace{P(E \cap F)}_{\text{superare l'esame}} = P(F)P(E|F) = 0,8 \times 0,9$$

Generalizzazione all'intersezione di più eventi

FORMULA del PRODOTTO.

$E_1, \dots, E_n$ eventi di Ω. $P(E_1 \cap \dots \cap E_n) \neq 0$.

$$P(E_1\cap\dots\cap E_n)=P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1\cap E_2)\dots P(E_n|E_1\cap\dots\cap E_{n-1}).$$

Infatti

$$P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1\cap E_2)\dots P(E_n|E_1\cap\dots\cap E_{n-1})$$

$$=\cancel{P(E_1)}\frac{P(\cancel{E_2E_1})}{\cancel{P(E_1)}}\frac{P(E_3\cancel{E_1E_2})}{\cancel{P(E_1E_2)}}\dots\frac{P(E_1\dots E_{n-1}E_n)}{P(\cancel{E_1\dots E_{n-1}})}$$

$$=P(E_1\cap\dots\cap E_n).$$

La prob. condizionata come probabilità.

PROP P prob. su Ω, $P(F)>0$.

$P(\cdot|F)$ è una probabilità sia su Ω che su F.

Dim. $Q(A):=P(A|F)$ è probabilità su F:

1) $Q(A)\in[0,1]$?

$$Q(A)=\frac{P(A\cap F)}{P(F)}\in[0,1]\ ✓$$

2) $Q(\emptyset)=\dfrac{P(\emptyset\cap F)}{P(F)}=\dfrac{P(\emptyset)}{P(F)}=0$; $Q(F)=\dfrac{P(F\cap F)}{P(F)}=1$

3) $A_n\subseteq F$ a due a due disgiunti

$$\underline{Q(\bigcup_n A_n)}=\frac{P((\bigcup_n A_n)\cap F)}{P(F)}=\frac{P(\bigcup_n A_n)}{P(F)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}P(A_n)}{P(F)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P(A_n)}{P(F)}=\sum_{n=0}^{\infty}P(A_n|F)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}Q(A_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} Q(A_n).$$

$\Rightarrow Q$ è prob. su $\mathcal{F}$. Analog. si prova che è prob. su Ω.

FORMULA di INVERSIONE

Siano E, F con probabilità $\neq 0$

Allora $$\boxed{P(E|F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F)}}$$

Dim. $P(E|F)P(F) = P(E \cap F) = P(F|E)P(E)$.

ESEMPIO. $P(\text{Rublo}\uparrow | \text{Petrolio}\uparrow) = 80\%$

$P(\text{Petrolio}\uparrow) = 20\%$

$P(\text{Rublo}\uparrow) = 50\%$

Il rublo è salito. Qual è la probabilità che salga il petrolio?

$$P(\text{Petr}\uparrow | \text{Rublo}\uparrow) = ?$$

$$= \frac{P(\text{Rublo}\uparrow | \text{Petrolio}\uparrow) P(\text{Petrolio}\uparrow)}{P(\text{Rublo}\uparrow)}$$

$$= \frac{0{,}8 \times 0{,}2}{0{,}5} = \frac{16}{50} = \frac{8}{25}$$

ESEMPIO

Il Sì al Referendum è dato al 48% (perdente)

Se tutti gli elettori dell'area politica W Venezia vanno

Se tutti gli elettori dell'area politica <u>WVenezia</u> vanno a votare, il Si vince con il 52%.
Il partito VWe rappresenta il 3% della Popolazione
Il Si vince. Qual è la probabilità che tutti gli elettori di WVenezia siano andati a votare?

$$P(WVe \mid Si) = \frac{P(Si \mid WVe)\,P(WVe)}{P(Si)}$$

Stessa domanda se $P(WVe) = 40\%$

Formula della partizione

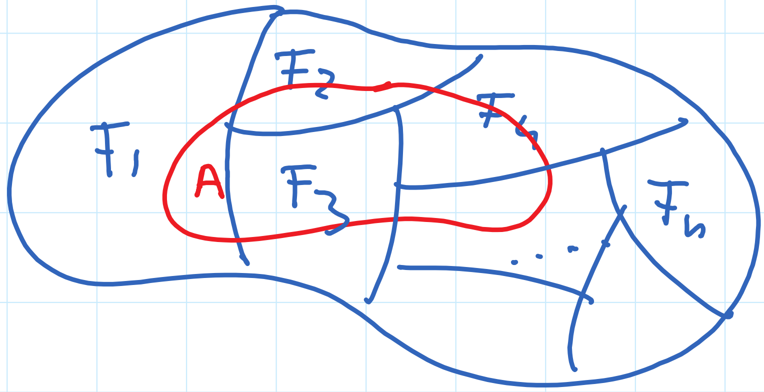
martedì 1 dicembre 2015 22:06

Come ricavare la probabilità di un evento a partire dalle sue probabilità condizionate.

FORMULA della PARTIZIONE

$(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ partizione di Ω:

$$\begin{cases} \bigcup_n F_n = \Omega \\ F_i \cap F_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \\ P(F_i) > 0 \end{cases}$$



Se $A \subseteq \Omega$

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A|F_i)\,P(F_i)}$$

$\Rightarrow$ conoscendo $P(F_i)$ "F_i ipotesi"

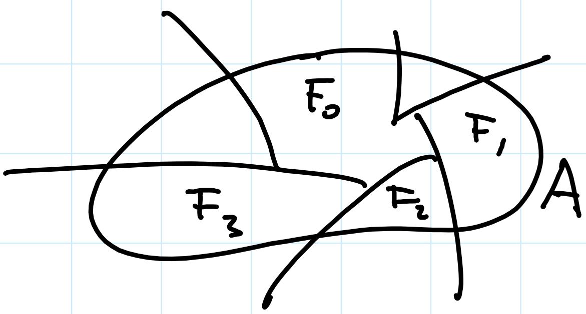
$P(A|F_i)$

si conosce $P(A)$.

$\Rightarrow$ Se $\{F_1, \dots, F_n\}$ partizione:

$$P(A) = P(A|F_1)P(F_1) + \dots + P(A|F_n)P(F_n).$$

Dim. A

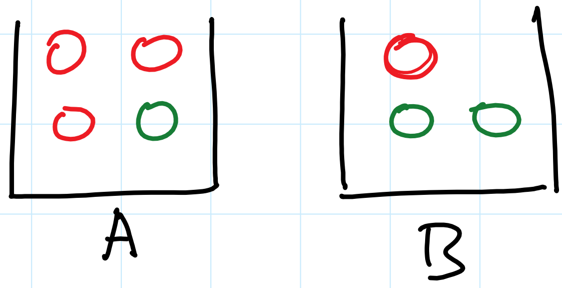


$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_i F_i\right) = \bigcup_i \underbrace{(A \cap F_i)}$$

a due a due disgiunti

$$P(A) = \sum_i P(A \cap F_i) = \sum_i P(A|F_i)P(F_i) \quad \#$$

ESEMPIO. 2 urne



Si lancia una moneta: Testa con prob $\frac{1}{4}$

- se viene testa si estrae 1 pallina da A
- se viene croce si estrae 1 pallina da B

Qual è la prob. che la pallina estratta sia Rossa?

$$P(\text{Rossa}) = P(\text{Rossa}|A)P(A) + P(\text{Rossa}|B)P(B)$$

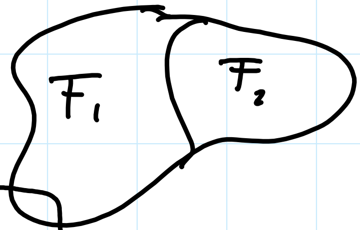
$$\frac{3}{4} \times \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{Prob}(T)} + \frac{1}{3} \times \underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{Prob}(\text{Croce})}$$

Formula di BAYES con 2 insiemi

F_1, F_2 partizione di Ω (cioè $F_2 = \Omega \setminus F_1$)

$P(F_1) > 0, \quad P(F_2) > 0$

$P(E|F_1), P(E|F_2)$ note.



$$\boxed{P(F_1|E) = \frac{P(E|F_1)P(F_1)}{P(E)} = \frac{P(E|F_1)P(F_1)}{P(E|F_1)P(F_1) + P(E|F_2)P(F_2)}}$$