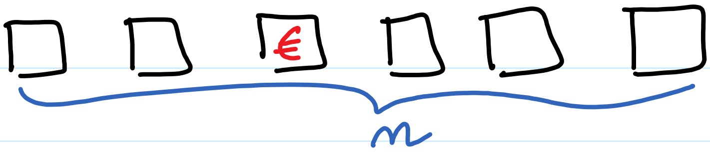
# ESERCIZIO (la scatola vincente)

Vi sono $n \geq 3$ scatole, una sola delle quali è vincente



Il giocatore sceglie una scatola.
Ad un certo punto del gioco vede che una delle altre scatole non è vincente.
Gli viene proposto di cambiare scatola. Cosa conviene fare?

$V_C$ = vincere se cambio la scatola.
$V_T$ = " tenendo la propria scatola

Calcolare $P(V_C), P(V_T)$ (Sugg: condizionare a seconda che avvenga €: la scatola in possesso è vincente)

$$P(V_C) = \underbrace{P(V_C | €)}_{0} P(€) + \underbrace{P(V_C | €^c)}_{\frac{1}{n-2}} \underbrace{P(€^c)}_{1-\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{n-2} \times \frac{n-1}{n} = \boxed{\frac{1}{n} \times \frac{n-1}{n-2}}$$

$$P(V_T) = \underbrace{P(V_T | €)}_{1} \underbrace{P(€)}_{\frac{1}{n}} + \underbrace{P(V_T | €^c)}_{0} P(€^c) = \boxed{\frac{1}{n}}$$

$$P(V_T) = \underbrace{P(V_T \mid E)}_{1} \underset{\frac{1}{n}}{P(E)} + \underbrace{P(V_T \mid E)}_{0} P(E) = \boxed{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{n-1}{n-2} > 1 \Rightarrow P(V_c) > P(V_T).$$

# LA FORMULA DI BAYES.

- Una famiglia di eventi (ipotesi) $F_1, F_2, F_3, \dots$ delle quali si conoscono le probabilità.

- Si considera un evento A. Si conoscono $P(A|F_1), P(A|F_2), \dots, P(A|F_n), \dots$

- Se A si realizza, come cambiano le probabilità di $F_1, F_2, \dots$ ?

ES. C'è il sole → Tizio va al mare con prob. 80%
Piove → Tizio va al mare con prob 1%
Nuvolo senza pioggia → Tizio va al mare con prob 30%

Tizio è andato al mare. Con che probabilità c'era il sole?

## FORMULA di BAYES

$\{F_i\}_i$ PARTIZIONE di $\Omega$. $A \subseteq \Omega$. $P(F_i) > 0$

$$\boxed{P(F_j|A) = \frac{P(A|F_j)P(F_j)}{P(A)} = \frac{P(A|F_j)P(F_j)}{\sum_i P(A|F_i)P(F_i)}}$$

Dim. Vale la formula di inversione

$$P(F_j|A) = \frac{P(A|F_j)P(F_j)}{\dots}$$

$$P(F_j \mid A) = \frac{P(A \mid F_j)\,P(F_j)}{P(A)}$$

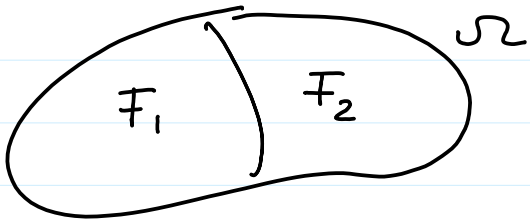
Per la formula della partizione

$$P(A) = \sum_i P(A \mid F_i)\,P(F_i) \qquad \#$$

## Caso $n=2$

$F_1$, $F_2 = \Omega \setminus F_1$

$0 < P(F_1) < 1$




$$P(F_1 \mid A) = \frac{P(A \mid F_1)\,P(F_1)}{P(A)} = \frac{P(A \mid F_1)\,P(F_1)}{P(A \mid F_1)\,P(F_1) + P(A \mid F_2)\,P(F_2)}$$

**ESEMPIO.** Assicurazione

Il 30% della popolazione appartiene alla classe dei "propensi" agli Incidenti: hanno un incidente entro l'anno con probabilità del 40%

$$P(I) = 0{,}3$$

$A$ = incidente entro l'anno $\quad P(A \mid I) = 0{,}4$

$N$: Non propensi agli incidenti: $P(A \mid N) = 0{,}2$; $P(N) = 0{,}7$

Una persona stipula l'assicurazione.

1) Qual è la probabilità che la persona abbia un incidente entro l'anno?

$$P(A) = P(A|I)\,P(I) + P(A|N)\,P(N)$$
$$= 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}7 = 26\%$$

2) Si realizza A: la persona ha avuto un incidente.
Qual è la probabilità che la persona appartenga alla classe dei propensi agli incidenti?

$$P(I|A) = \frac{P(A|I)P(I)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \times 0{,}3}{0{,}26} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$$

• ESEMPIO: Delitto. Indiziato: maggiordomo.

$P(M \mid \text{Porta}) = 60\%$

$P(M \mid \text{Finestra al I piano}) = 10\%$

$P(\text{Porta}) = 70\%$ $\quad P(\text{Finestra}) = 30\%$

1) Probabilità che il maggiordomo sia l'autore del delitto?

$$P(M) = P(M|\text{Porta})P(\text{Porta}) + P(M|\text{Fin})P(\text{Fin})$$
$$= 0{,}6 \times 0{,}7 + 0{,}1 \times 0{,}3 = 0{,}45$$

2) Il maggiordomo confessa. Qual è la probabilità che l'assassino sia entrato dalla porta?

$$P(\text{Porta}|M) = \frac{P(M|\text{Porta})P(\text{Porta})}{}$$

che è usanomo sia arrivato dalla porta.

$$P(\text{Porta}|M) = \frac{P(M|\text{Porta})P(\text{Porta})}{P(M)}$$

$$= \frac{0{,}6 \times 0{,}7}{0{,}45} = \frac{42}{45} = \frac{14}{15}$$

## ESEMPIO (Test clinici)

Apparecchio per individuare la presenza di una malattia.

$$P(\text{Malato}) = \frac{4}{10.000} \qquad P(\text{Pos}|\text{Malato}) = 99\%$$

$$P(\text{Pos}|\text{Sano}) = 2\% \leftarrow \text{FALSI POSITIVI}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(\text{Negativo}|\text{Malato}) = 1\% \\ P(\text{Negativo}|\text{Sano}) = 98\% \end{cases}$$

→ Una persona effettua il test: esito è positivo.
Qual è la probabilità che la persona soffra della malattia?

$$P(\text{Malato}|\text{Pos}) = \frac{\overset{0{,}99}{P(\text{Pos}|\text{Malato})}\,\overset{4/10.000}{P(\text{Malato})}}{P(\text{Pos})}$$

$$= \frac{0{,}99 \times 4/10.000}{P(\text{Pos}|M)P(M) + P(\text{Pos}|\text{Sana})P(\text{Sana})}$$

$$= \frac{0{,}99 \times 4/10.000}{0{,}99 \times 4/10.000 + 0{,}02 \times \left(1 - \frac{4}{10.000}\right)}$$

$$= 2\%$$

## Interpretazione.

- Campione di 100.000 persone.
- $\# \text{Malati} \approx 100.000 \times \frac{4}{10.000} = 40 \Rightarrow \# \text{Sani } 99960$

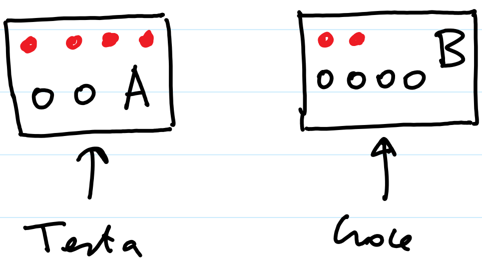
| | SANI | MALATI | |
|---|---|---|---|
| | 99960 | 40 | |
| Test + : | 2% ≈ 2.000 | 99% 40 | TOT: 2040 |

$$\frac{\# \text{Malati}}{\# \text{Test Pos}} = \frac{40}{2040} \approx 2\%$$

- 83. Il dado A ha 4 facce rosse e 2 facce bianche, mentre il dado B ha 2 facce rosse e 4 facce bianche. Si lancia una volta una moneta non truccata. Se esce testa, il gioco continua con il dado A; se esce croce, si usa il dado B.
(a) calcolare la probabilità che la faccia sia rossa ad un dato lancio.

(b) Se nei primi due lanci si ottiene il rosso, qual è la probabilità che venga rosso al terzo lancio? (impostarlo)

(c) Se nei primi due lanci si ottiene il rosso, qual è la probabilità che sia stato usato il dado A?




a) $P(R) = P(R|\text{Testa})P(\text{Testa}) + P(R|\text{Croce})P(\text{Croce})$

$$= \frac{4}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

b) $P(R_1 R_2) = ?$

c) $R_1 R_2$ si realizza. Quanto vale $P(A | R_1 R_2)$

ESEMPIO. Si lancia una moneta.

Se Testa: si estrae una pallina da un'urna con palline numerate da 1 a 20

Se Croce: si estrae una pallina da un'urna di palline numerate da 1 a 30

Se Croce: si estrae una pallina da un'urna
di palline numerate da 1 a 30.

Esce Testa. Qual è la probabilità che venga estratto un multiplo di 3, sapendo che viene estratto un numero pari?

# INDIPENDENZA DI EVENTI

$A, B$ eventi di $\Omega$ con $\underline{P(A)>0}$, $P(B)$

$A, B$ indip. se $P(B) = P(B|A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$$\boxed{P(A)\cdot P(B) = P(A\cap B)}$$

Ricordiamo che se $P(A)>0$ è

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B|A).$$

**DEF.** Sia $(\Omega, P)$ spazio con probabilità.
Si dice $A, B \subseteq \Omega$ sono <u>indipendenti</u> se

$$\boxed{P(A\cap B) = P(A)\,P(B)}$$

**Significato.** Se $P(A)>0$ $A, B$ indip
$\iff P(B) = P(B|A)$.

"Il realizzarsi o meno di A non influenza B"

**OSS:** se $P(A), P(B) > 0$ e $P(A\cap B) = 0$ allora
$A, B$ non sono indipendenti:

Eventi disgiunti di prob $>0$ NON sono indip!

Spiegazione: se $A \cap B = \emptyset$ è $A \subseteq \Omega \setminus B$ : se $B$ non si realizza si realizza $A$.

ESEMPIO. Lancio di una moneta equilibrata

$A$: "esce testa" $B$ = "esce croce".

$P(A \cap B) = 0$ $P(A)P(B) = \frac{1}{4} > 0$.

$A, B$ sono indipendenti

• ESEMPIO. Dado con 6 facce (equilibrato ecc...)

$P(\{i\}) = \frac{1}{6}$

$A$ = esce un numero pari $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$B$ = esce un numero $\geq 4$ $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$A, B$ sono indipendenti?

Modo I $P(A \cap B) = P(\text{pari} \geq 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \neq P(A)P(B) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow A, B$ non indip.

Modo II $P(A|B) = \frac{2}{3} \neq P(A) = \frac{1}{2}$ : $A, B$ non sono indip.

• ESEMPIO. 52 carte. $A$ = estrarre ♡

$B$ = estrarre una figura

$A$ e $B$ sono indipendenti?

$P(A) = \frac{1}{4}$ $P(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

$P(A) = \frac{1}{4} \qquad P(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{52} = \frac{3}{13} \times \frac{1}{4} = P(A)P(B): \quad A, B \text{ sono indipendenti}$$

ESEMPIO. Urna con 20 Rosse, 10 Bianche.

Si estraggono 2 palline. $A$: la $1^a$ è R ; $B$: la $2^a$ è R

Dire se $A$, $B$ sono indipendenti. $P(A) = P(B) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

I] Con reimmissione.

$$P(B|A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = P(B) \qquad A, B \text{ indip.}$$

II] Senza reimmissione

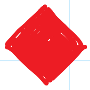
$$P(B|A) = \frac{19}{29} \neq \frac{2}{3} : \qquad A, B \text{ non sono indip.}$$

Il concetto di indipendenza dipende dalla probabilità scelta nello spazio campionario!

ESEMPIO. 52 carte da Poker

$A$: Si estrae un Asso

$B$: Si estrae un ♦

B: Si estrae un 

I] Carte equiprobabili.

$$P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13} \quad ; \quad P(B)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{52}=\frac{1}{13}\times\frac{1}{4}=P(A)\times P(B)$$

A, B sono indipendenti

II] Mazzo truccato.

$P($  $)=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $P($Carte $\neq$  $)=p\in\,]0,1[$

a) Determinare $p$

$$P(\text{Non Jack})=\frac{1}{2}=51p \Rightarrow p=\frac{1}{102}$$

b) Calcolare $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$

$P(A)=4p \qquad P(B)=13p \qquad P(A\cap B)=p$

$$P(A)P(B)=P(A\cap B) \Leftrightarrow 52p^2=p$$

$$\Leftrightarrow 52p=1 \Leftrightarrow p=\frac{1}{52} : \text{FALSO}$$

$\Rightarrow$ A, B NON sono indipendenti

ESEMPIO. A, B indip $\Rightarrow$ A, $B^c$ sono indip

$\Rightarrow A^c\ B^c$ sono indip.

$$\underline{P(A\cap B^c)} = P(A\setminus A\cap B) = P(A) - \underbrace{P(A\cap B)}_{P(A)P(B)}$$

$$= P(A) - P(A)P(B)$$

$$= P(A)(1-P(B)) = \underline{P(A)P(B^c)}.$$

$\Rightarrow A, B^c$ sono indipendenti

## INDIPENDENZA TRA PIÙ EVENTI

DEF. Sia $(\Omega, P)$ spazio campionario.
$A, B, C \subseteq \Omega$ si dicono indipendenti se

$P(A\cap B) = P(A)P(B)$;

$P(A\cap C) = P(A)P(C)$;

$P(B\cap C) = P(B)P(C)$;

$P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

OSS:
In generale le prime 3 condizioni $\not\Rightarrow P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$

ESEMPIO. Tre persone, ognuna delle quali ha un dado equilibrato.

$E_1 =$ x e y hanno lo stesso risultato

$E_2 =$ y e z " " "

$E_3 =$ x e z " " "

Provare che i tre eventi sono a due a due indipendenti ma $E_1, E_2, E_3$ non sono indipendenti

$P(E_1) = \frac{6}{\ } = \frac{1}{\ }$ ; $P(E_2) = \frac{1}{\ }$

indipendenti ma $E_1, E_2, E_3$ non sono indipendenti

$$P(E_1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad ; \quad P(E_2) = \frac{1}{6}$$

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{6}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{6 \times 6} = P(E_1) \times P(E_2)$$

$\Rightarrow E_1, E_2$ sono indip.

Analog. $E_2, E_3$ sono indip ; $E_1, E_3$ indip.

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{1}{6 \times 6} \neq \underbrace{P(E_1) \times P(E_2) \times P(E_3)}_{1/6^3}$$

**DEF.** $(\Omega, P)$ spazio campionario.

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sono indipendenti se

$\forall\, i_1, \dots, i_m$ distinti: $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1}) \times \dots \times P(A_{i_m})$

**ES.** Se $\underbrace{I_N \times \dots \times I_N}_{n \text{ volte}} = n$-sequenze di $I_N$

Sia $A_1 = B_1 \times I_N \times \dots \times I_N$ (dipende solo dal 1° esp.)

$A_2 = I_N \times B_2 \times I_N \times \dots \times I_N$ (dipende dal 2° ...)

$\vdots$

$A_n = I_N \times \dots \times B_n$ (dipende dall'n-esimo)

Se su $I_N \times \dots \times I_N$ c'è la prob. uniforme, gli eventi $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono indipendenti

$$P(A_1 \cap A_2) = P(B_1 \times B_2 \times I_N \times \dots \times I_N)$$

$$= \frac{|B_1 \times B_2 \times \dots \times I_N|}{|I_N \times \dots \times I_N|} = \frac{|B_1||B_2|}{|I_N||I_N|}$$

$$= \frac{|B_1|}{|I_N|} \times \frac{|B_2|}{|I_N|} = P(A_1) \times P(A_2).$$

## PROVE INDIPENDENTI

Consideriamo una successione di esperimenti. Si dice che si tratta di una successione di prove indipendenti se

$\forall A_1$ relativo al 1° esperimento

$\vdots$

$\forall A_m$ relativo all'm-esimo esperimento

gli eventi $A_1, A_2, \dots, A_m$ sono indipendenti.

**ESEMPIO.** Moneta con probabilità $\frac{1}{4}$ di dare Testa

Due lanci indipendenti.

Probabilità (Testa al 1°, Testa al 2° lancio)

$\quad\quad\quad ||$

P(Testa al 1°) $\times$ P(Testa al 2°) (indipendenza)

P(Testa al 1°) × P(Testa al 2°)   (indipendenza)

$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ .

ESERCIZIO. Si lancia una moneta $n$ volte

I LANCI SONO INDIPENDENTI

Sia $0 \leq k \leq n$. P(esattamente $k$ Teste) = ?