• ESERCIZIO. Si lancia una moneta n volte

I LANCI SONO INDIPENDENTI

Sia $0 \le k \le n$. $P(\text{esattamente } k \text{ Teste}) = ?$

p = probabilità che la moneta dia Testa

$$P((\underbrace{T, \dots, T}_{k}, \underbrace{C, \dots, C}_{n-k})) = P(T \text{ al } 1^\circ \text{ e } \dots \text{ e } T \text{ al } k\text{-esimo}, C \text{ al } (k+1), \dots, C \text{ all'}n\text{-esimo})$$

INDIPENDENZA

$$= P(T \text{ al } 1^\circ) \times P(T \text{ al } 2^\circ) \times \dots \times P(C \text{ all'}n\text{-esimo})$$

$$= p^k (1-p)^{n-k}$$

n-sequenze di $\{T, C\}$ con k "T" e $(n-k)$ "C" è uguale a: $\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ (anagrammi di $\underbrace{T \dots T}_{k} \underbrace{C \dots C}_{n-k}$)

$$\binom{n}{k}$$ (# numero di sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ corrispondenti alle posizioni di T)

$$\Rightarrow \boxed{P(\text{esatt } k\text{-teste}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

INDIPENDENZA E CONDIZIONAMENTO

P probabilità su Ω. Se $P(F)>0$, $F \subseteq \Omega$,

poniamo $Q_F(A) = P(A|F)$.

PROP. Siano $F_1, F_2 \subseteq \Omega$ con $P(F_1 \cap F_2) > 0$.

Allora $\forall A \subseteq \Omega$:

$$Q_{F_1}(A|F_2) = P(A|F_1 \cap F_2) = Q_{F_2}(A|F_1)$$

Dim. $Q_{F_1}(A|F_2) = \dfrac{Q_{F_1}(A \cap F_2)}{Q_{F_1}(F_2)} = \dfrac{P(A \cap F_2 | F_1)}{P(F_2|F_1)}$

$$= \frac{P(A \cap F_2 \cap F_1) / \cancel{P(F_1)}}{P(F_1 \cap F_2) / \cancel{P(F_1)}} = \frac{P(A \cap F_1 \cap F_2)}{P(F_1 \cap F_2)}$$

$= P(A|F_1 \cap F_2)$.

INDIPENDENZA CONDIZIONALE

DEF. (Ω, P) spazio con probabilità.

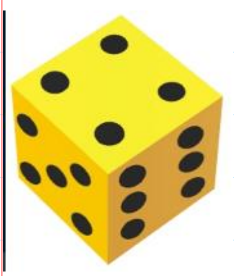
DEF. (Ω, P) spazio con probabilità.
Gli eventi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti dato l'evento F $(P(F)>0)$ se essi sono indipend. per la probabilità Q_F.

ESEMPIO. A, B indipendenti dato $F \iff$

$$Q_F(A\cap B)= Q_F(A)\,Q_F(B)$$
$$\boxed{P(A\cap B|F)= P(A|F)\,P(B|F)}.$$

ESERCIZIO. Lancio un dado equilibrato.

- Esce 1,2,3,4: lancio 2 volte la moneta 1 che dà Testa con prob. $\boxed{40\%}$
- Esce 5 o 6: lancio 2 volte la moneta 2 che dà Testa con prob. $\boxed{70\%}$



$2/3$ — 1, 2, 3, 4 :

P(Testa) = 40%

$1/3$ — 5, 6 :

P(Testa) = 70%

1) Qual è la probabilità che esca Testa?

$$P(T) = P(T|1)P(1) + P(T|2)P(2)$$
$$= \frac{4}{10} \times \frac{2}{3} + \frac{7}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

Si suppone che, dato l'esito del dado, i lanci sono indipendenti. $\Big\}$ IPOTESI DI INDIPENDENZA CONDIZIONALE

Una volta scelta la moneta si fanno 2 lanci

2) Qual è la probabilità che escano due teste?

$$P(T_1 \cap T_2) = P(T_1 \cap T_2|1)P(1) + P(T_1 \cap T_2|2)P(2)$$
$$= P(T_1|1)P(T_2|1)P(1) + P(T_1|2)P(T_2|2)P(2)$$
$$= \left(\frac{4}{10}\right)^2 \times \frac{2}{3} + \left(\frac{7}{10}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{32+49}{300} = \frac{81}{300}$$

3) T_1 = testa al 1° lancio, T_2 = testa al 2° lancio

T_1 e T_2 sono indipendenti?

$$P(T_1 \cap T_2) = \frac{81}{300} \qquad P(T_1) = \frac{1}{2}$$
$$P(T_2) = \frac{1}{2}$$
$$P(T_1)P(T_2) = \frac{1}{4} \neq \frac{81}{300}$$

$\Rightarrow$ T_1 e T_2 non sono indipendenti.

ESERCIZIO. Assicurazione distingue due classi:

I : propensi agli incidenti : $P(I) = 30\%$

A : avere un incidente entro l'anno : $P(A|I) = 40\%$

N : Non propensi agli incidenti $P(A|N) = 20\%$

A_1: un incidente entro il primo anno

$P(A_1) = P(A_1|I)P(I) + P(A_1|N)P(N) = 0{,}26 = 26\%$

- Una persona ha un incidente entro l'anno. (si verifica cioè A_1).

Qual è la probabilità che la persona abbia un incidente al 2° anno (A_2)?

IPOTESI DI INDIPENDENZA CONDIZIONATA

Si suppone che, sapendo che uno è propenso o non propenso agli incidenti, A_1 e A_2 siano indipendenti.

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)}$$: simile a quanto svolto sopra (con T_1, T_2 al posto di A_1, A_2)

incidenti ↑

Altro metodo

$$Q_{A_1}(A_2) = Q_{A_1}(A_2|N)\,Q_{A_1}(N) + Q_{A_1}(A_2|I)\,Q_{A_1}(I)$$

$$Q_{A_1}(N) = P(N|A_1) \quad \text{(Bayes)}$$

$$Q_{A_1}(I) = P(I|A_1) \quad \text{(Bayes)}$$

$$Q_{A_1}(A_2|N) \overset{?}{=} Q_N(A_2|A_1) = Q_N(A_2) = P(A_2|N) = 0{,}2.$$

(indipendenza condizionata)