EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA. Risolvere l'equazione differenziale $y' = f(t,y)$ significa trovare un intervallo $]a,b[$ e una funzione $y :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ tali che

$$\begin{cases} (t, y(t)) \in \Omega & \forall t \in]a,b[\\ y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in]a,b[\end{cases}$$

ES. Sia $y(t) = e^t$. Si ha $y'(t) = e^t$:

la funzione $y(t) = e^t$ soddisfa a $y' = y$.

Qui $f(t,y) = y \quad \forall (t,y) \in \mathbb{R}^2 := \Omega$

ES. $y(t) = \frac{1}{t}$ soddisfa a $y'(t) = -\frac{1}{t^2} = -\frac{1}{t} y(t)$, $t > 0$.

Qui $f(t,y) = -\frac{y}{t}$, $\forall (t,y) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R} := \Omega$.

ESEMPIO (Evoluzione di una popolazione).

$p(t) = \#$ di individui al tempo t.

$$\frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t} = k\, p(t) \qquad (\Delta t \text{ piccolo})$$

$\Delta t \to 0$: $\boxed{p'(t) = k\, p(t)}$

Una soluzione è $p(t) = e^{kt}$ o $\boxed{p(t) = C e^{kt}}$ $\forall C \in \mathbb{R}$

Se $p(0) = p_0$ esiste unica una sol. del tipo

$p(t) = Ce^{kt}$ tale che $p(0) = p_0$: $C\underbrace{e^{k\cdot 0}}_{=1} = p_0$:

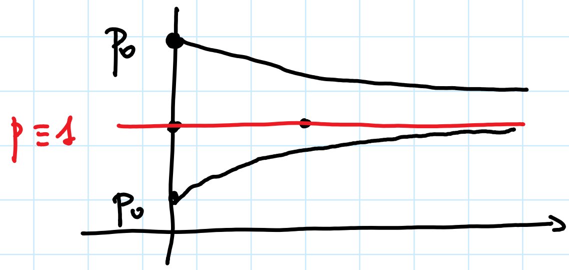
si deve scegliere $C = p_0$: la sol. è $\boxed{p(t) = p_0 e^{kt}}$

ESEMPIO (Modello logistico) $\boxed{p'(t) = k\, p(t)(1 - p(t))}$

OSS: se $p(t) > 1 \Rightarrow p'(t) < 0$

$p(t) \in]0,1[\quad p'(t) > 0$

$p(t) \equiv 0$ e $p(t) \equiv 1$ sono soluzioni:



Sia ora $(t_0, y_0) \in \Omega$. Risolvere il

Problema di Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ significa

trovare dato iniziale

- un intervallo $]a,b[$ contenente t_0;
- una funzione $\mathcal{C}^1$ $y :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ tale

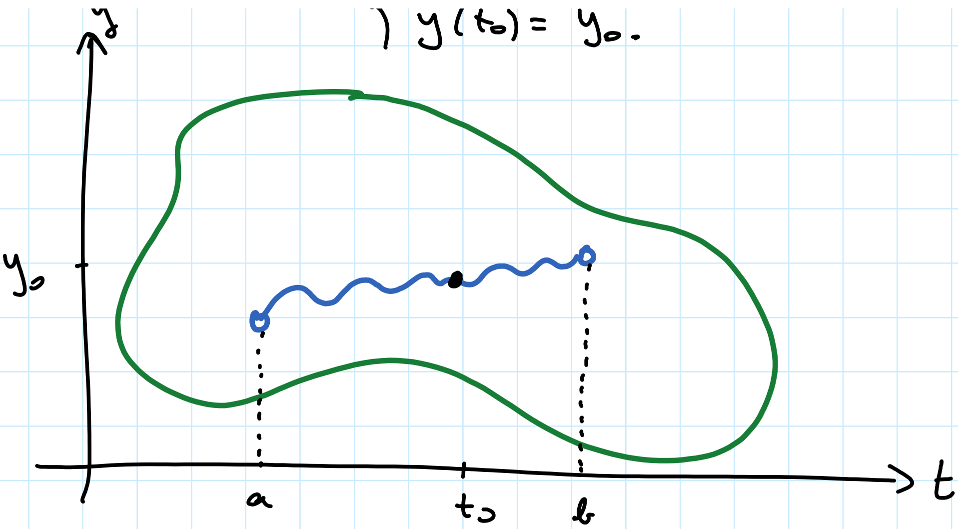
che $(t, y(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in]a,b[$

tali che

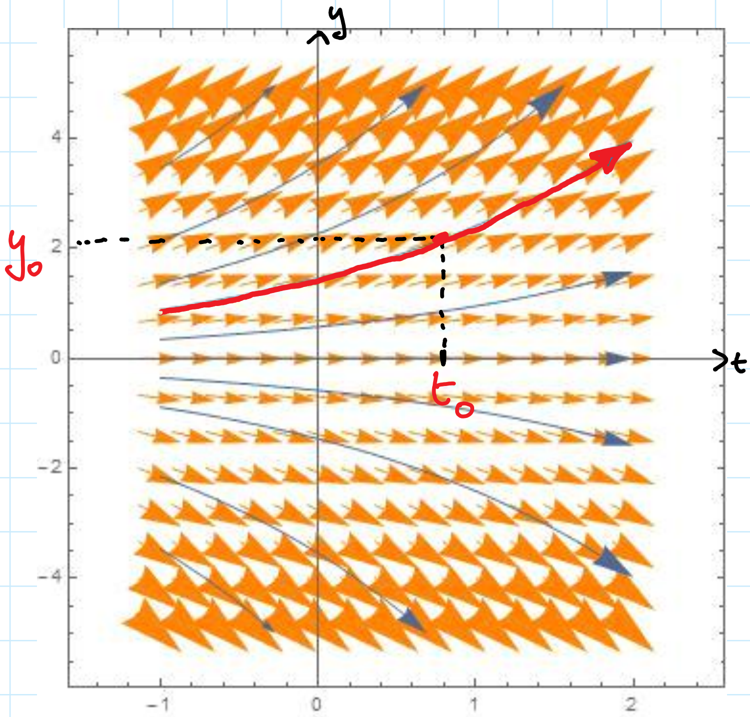
$\forall t \in]a,b[$: $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$

$\uparrow y$

$\} \; y(t_0) = y_0.$



INTERPRETAZIONE. La curva $t \longmapsto (t, y(t))$ ha come vettore tangente $(1, y'(t))$. Imporre $y'(t) = f(t, y(t))$ significa assegnare un campo $(t, y) \longmapsto (1, f(t,y))$ di vettori tangenti.

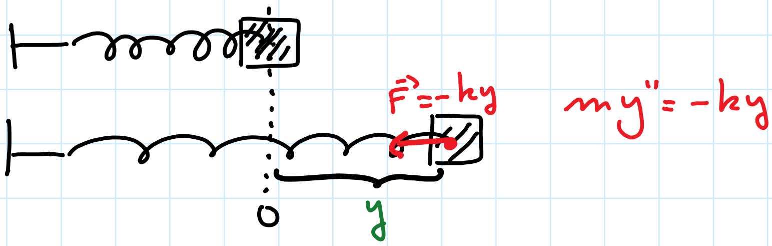


Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ significa trovare una curva cartesiana $t \mapsto (t, y(t))$ che passa per (t_0, y_0) e che ha quel dato campo di vettori tangenti in ogni punto.

ESEMPIO. Per ogni $C \in \mathbb{R}$ la funzione $y(t) = Ce^t$

soddisfa all'equazione differenziale $y'=y$.
Tra tutte queste funzioni l'unica che soddisfa il problema di Cauchy $\begin{cases} y'=y \\ y(0)=3 \end{cases}$ è $y(t)=3e^t$.
Infatti se $y(t)=Ce^t$ si ha $y(0)=Ce^0=C$.

OSS. Tratteremo qui solo alcuni tipi di eq. differenziali $y'=f(t,y)$, cioè per famiglie particolarmente semplici di funzioni $f(t,y)$.
Le eq. del tipo $y'=f(t,y)$ sono dette del I ordine, in forma normale (y' espressa in funz. della y).
Vi sono altri tipi di eq. differenziali, come ad esempio $y''=-\frac{k}{m}y$ (y: spostamento di una massa m all'estremità di una molla di costante elastica $k>0$)



ESEMPIO. $y'=0$, $t\in I$ intervallo $\Leftrightarrow y\equiv c\in\mathbb{R}$

Infinite sol di $y'=0$. $\begin{cases} y'=0 \\ y(t_0)=c \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{y(t)\equiv c}$

ESEMPIO. $f : I \to \mathbb{R}$ continua su I intervallo.

$y' = f \iff y(t) \in \int f(t)\,dt$: se $F(t)$ è una primitiva di f, $y(t) = F(t) + c \quad c \in \mathbb{R}$.

$\begin{cases} y' = f \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \iff y(t) = F(t) + c$, con $F(t_0) + c = y_0 \Rightarrow c = y_0 - F(t_0)$.

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

$$\begin{cases} y' = h(y)\,g(t) \\ y(t_0) = y_0 \in I \end{cases}$$

CONTINUE
$h : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$

- Se $h(y_0) = 0 \Rightarrow y(t) \equiv y_0$ è soluzione, $t \in]\alpha, \beta[$:

  $y'(t) \equiv 0$, $h(y(t))g(t) = h(y_0)\,g(t) = 0$.

- Se $h(y_0) \neq 0$ y continua, se $y(t_0) = y_0 \Rightarrow h(y(t)) \neq 0$ in un intorno di t_0.

$$y'(t) = h(y(t))\,g(t) \Rightarrow \frac{y'(t)}{h(y(t))} = g(t) \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{y'(\tau)}{h(y(\tau))}\,d\tau = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau$$

$$(u = y(\tau)) \Rightarrow \underbrace{\int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{1}{h(u)}\,du}_{\text{indip. da } y(t)} = G(t) := \underbrace{\int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau}_{\text{indip. da } y(t)}$$

$$y(t_0) = y_0 \Rightarrow \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{h(u)}\,du = G(t) \qquad \forall t.$$

Sia $\underline{h > 0}$ (esempio). $H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(u)}\,du$ è str. crescente : $H'(y) = \frac{1}{h(y)} > 0$

$\Rightarrow H$ è invertibile $\Rightarrow y(t) = H^{-1}(G(t))$. Si verifica che (localmente) y è una soluzione.

Se c'è una unica soluzione del PB. di Cauchy, l'intervallo massimale nel quale è l'intervallo massimale nel quale è definita la soluzione è il più grande intervallo contenuto in $]\alpha, \beta[$ contenente t_0 nel quale la soluzione può essere definita.

ESEMPIO $\begin{cases} y' = t y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ← Problema di Cauchy

Se c'è una soluzione $y(0) \neq 0 \Rightarrow y(t) \neq 0$ in un intorno di 0: dividiamo per y^2

$$\frac{y'}{y^2} = t \quad : \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad \frac{y'(s)}{y^2(s)} = s$$

Integriamo tra 0 e t.

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{y^2(s)}\, ds = \int_0^t s\, ds = \frac{1}{2} t^2$$

$u = y(s)$

$$\int_{y(0)=1}^{y(t)} \frac{1}{u^2}\, du = \left[-\frac{1}{u} \right]_1^{y(t)}$$

$$-\frac{1}{y(t)} + 1 = \frac{1}{2} t^2 \Rightarrow \frac{1}{y(t)} = 1 - \frac{t^2}{2}$$

$$y(t) = \frac{1}{1 - t^2/2}$$

(oss: $y(0) = 1$; verificare che $y'(t) = t y^2(t)$)

$t \neq \pm\sqrt{2}$

L'intervallo più grande contenente 0 nel quale y è definita è $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$: la soluzione è

$$y : \underbrace{]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[}_{\text{intervallo MASSIMALE}} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \boxed{y(t) = \frac{1}{1 - t^2/2}}$$

OSS: Modo II. $\frac{y'(t)}{y^2(t)} = t \Rightarrow \int \frac{y'(t)}{y^2(t)} dt = \frac{1}{2}t^2 + \text{cost}$

$\Rightarrow (u = y(t)) \qquad \int \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{2}t^2 + C \Rightarrow -\frac{1}{u} = \frac{1}{2}t^2 + C$

$\Rightarrow -\frac{1}{y(t)} = \frac{1}{2}t^2 + C \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{\frac{1}{2}t^2 + C}$

$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = -\frac{1}{\frac{1}{2}0^2 + c} \Rightarrow \quad c = -1 \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{\frac{1}{2}t^2 - 1} = \frac{1}{1 - t^2/2}.$

OSS: $y' = t y^2$ $t \in \mathcal{C}^\infty$ $y \mapsto y^2$ è $\mathcal{C}^\infty$

def. in $\mathbb{R}$ eppure la soluz. è definita solo in $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$: ciò in generale dipende dal dato iniziale

ESEMPIO: $\begin{cases} y' = t y^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$

$y' = t y^2 \qquad \frac{y'(s)}{y^2(s)} = s \qquad \int \frac{y'(s)}{y^2(s)} ds = \frac{1}{2}t^2 + C$

costante da scegliere dopo

$u = y(s) \qquad \int \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{2}t^2 + C$

$u = y(s) \qquad -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}t^2 + C$

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{\frac{1}{2}t^2 + C}}$$

$y(0) = -1$: $\quad -1 = -\frac{1}{0 + C} \Rightarrow -\frac{1}{C} = -1 \Rightarrow \boxed{C = 1}$

$y(t) = -\frac{1}{\frac{1}{2}t^2 + 1}$ definita in tutto $\mathbb{R}$.!!

! Il dominio di esistenza della soluzione è in generale una incognita del problema.

ESERCIZIO. $\boxed{y' = y(1-y)}$ $y > 0$

È una eq. a variabili separabili $y(t) \equiv 1$, $y(t) \equiv 0$ sono soluz.

È una eq. a variabili separabili $y(t)\equiv 0$ sono soluz.

$$\frac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))} = 1 \qquad \int \frac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))}\,dt = t+c$$

$\rightsquigarrow$ $y(t)\neq 1$ $y(t)\neq 0$

$u=y(t)$: $\displaystyle\int \frac{1}{u(1-u)}\,du = t+c$ con $\boxed{u=y(t)}$

$$\frac{1}{u(1-u)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{1-u} = \frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}$$

$$\int \frac{1}{u(1-u)}\,du = \lg|u| - \lg|u-1| + \text{cst.}$$
$$= \lg\left|\frac{u}{u-1}\right| + \text{cost.}$$

$$\Rightarrow \quad \lg\left|\frac{y(t)}{y(t)-1}\right| = t+c \Rightarrow$$

$$\left|\frac{y(t)}{y(t)-1}\right| = e^t e^c = c' e^t \qquad c'>0$$

$$\frac{y(t)}{y(t)-1} = \pm c' e^t = K e^t \qquad K\in\mathbb{R}.$$

$$y(t) = Ke^t(y(t)-1)$$
$$y(t)(Ke^t-1) = Ke^t \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{Ke^t}{Ke^t-1}}$$

Sia $y_0>0$, $y_0\neq 1$: esiste una sol. del tipo $y(t) = \dfrac{Ke^t}{Ke^t-1}$ t.c. $y(0)=y_0$?

$$y_0 = \frac{Ke^0}{Ke^0-1} = \frac{K}{K-1}$$

$$K = Ky_0 - y_0 \Rightarrow K(y_0-1) = y_0$$
$$\boxed{K = \frac{y_0}{y_0-1}}$$

$$\boxed{K = \frac{y_0}{y_0 - 1}}$$

OSS: se $y_0 = 1$ l'eq. $1 = \frac{K}{K-1}$ non ha sol

$$\boxed{y(t) = \frac{Ke^t}{Ke^t - 1} \quad \text{con } K = \frac{y_0}{y_0 - 1} \quad \text{se } y_0 \neq 1}$$

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{Ke^t}{Ke^t - 1} = 1.$$

- $y_0 > 1$: $K = \frac{y_0}{y_0 - 1} > 1 \Rightarrow \underset{t>0}{Ke^t - 1 > 0}$

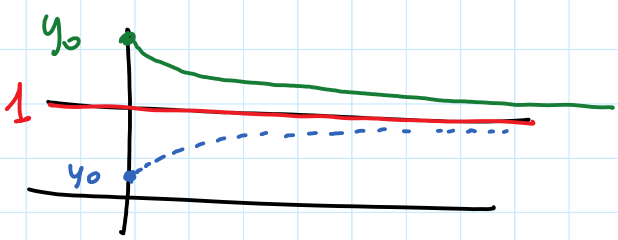
$$\Rightarrow y(t) = \frac{Ke^t}{Ke^t - 1} > 1$$

$\Rightarrow y'(t) = y(t)(1 - y(t)) < 0 \Rightarrow y$ è decrescente.

- Se $0 < y_0 < 1$ è $K = \frac{y_0}{y_0 - 1} < 0 \Rightarrow Ke^t, Ke^t - 1 < 0$

$\Rightarrow y(t) > 0$; inoltre $\frac{Ke^t}{Ke^t - 1} < 1$ perché $Ke^t > Ke^t - 1$.

$\Rightarrow y(t) \in]0, 1[\Rightarrow y'(t) = y(t)(1 - y(t)) > 0$



OSS. Abbiamo visto che le eq. a variabili

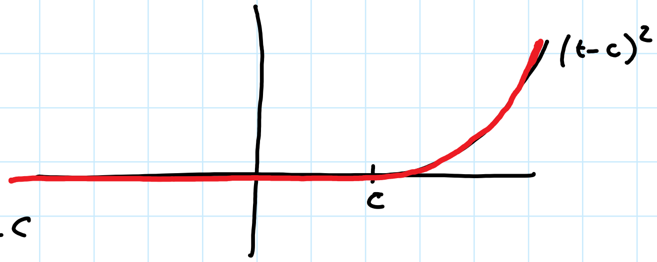
separabili ammettono sempre, almeno attorno al punto iniziale, almeno una soluzione.

Si noti che la soluzione può non essere unica.

ESEMPIO. Se $c \in \mathbb{R}$ si ha

$$\frac{d}{dt}(t-c)^2 = 2(t-c) \quad \text{per ogni } t$$

Si fissi $c>0$.



La funzione

$$y_c(t) = \begin{cases} (t-c)^2 & t \geq c \\ 0 & t \leq c \end{cases}$$

è C^1, soddisfa a $\begin{cases} y_c' = 2\sqrt{y_c} \\ y_c(0) = 0 \end{cases}$

Il prob di Cauchy $\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ ha quindi infinite soluzioni. #

EQUAZIONI LINEARI: $y' = a(t)y + b(t)$

a, b: I intervallo $\longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUE

PROP. Dati $t_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ esiste unica la soluzione di $\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ definita su I

L'insieme delle soluzioni di $y' = a(t)y + b(t)$ è dato da

$$\boxed{y(t) = Ce^{A(t)} + B(t)e^{A(t)} \quad \text{dove} \quad A' = a \quad \text{e} \quad B'(t) = b(t)e^{-A(t)}}$$

una qualunque primitiva

è dato da

$$\boxed{y(t) = C e^{A(t)} + B(t) e^{A(t)} \quad \text{dove} \\ A' = a \quad \text{e} \quad B'(t) = b(t) e^{-A(t)}}$$

una qualunque primitiva

OSS. Per $b=0$ si ottiene $y(t) = C e^{A(t)}$

Quindi $\{C e^{A(t)}\}$ è l'insieme delle soluzioni di $y' = a(t) y$. $B(t) e^{A(t)}$ è ← $(C=0)$ invece una soluzione particolare di $y' = a(t)y + b(t)$.

Quindi le sol. di $y' = a(t) y + b(t)$ si ottengono aggiungendo ad una sol. particolare dell'eq. tutte le soluzioni dell'equazione OMOGENEA $y' = a(t)y$.

ESEMPIO. $y' = -y + t \qquad y' + y = t$ ← lasciamo a destra tutto ciò che non dipende da y

$$\left[\, Y' = g \Rightarrow Y(t) = \int g(t)\,dt + \text{cost} \,\right]$$

Idea: vedere $y' + y$ come la derivata di qualcosa.

Osserviamo che la derivata di $y(t) e^t$ è

$$(y'(t) e^t + y(t) e^t) = (y'(t) + y(t)) e^t$$

Ho scelto e^t perché $(e^t)' = 1 \cdot e^t$

$$\left[\, \text{Ad es. se l'eq. fosse } y' + 3y = t, \quad (y e^{3t})' = (y' + 3y) e^{3t} \,\right]$$

$$y'(t)+y(t)=t.$$

Moltiplichiamo per e^t:

$$\underbrace{(y'(t)+y(t))e^t}=te^t$$

$$(y(t)e^t)'=te^t$$

$$y(t)e^t=\int te^t\,dt=te^t-e^t+c$$

$$\boxed{y(t)=t-1+ce^{-t}}\qquad c\in\mathbb{R}$$

∞ soluzioni, definite su tutto $\mathbb{R}$

Se vogliamo ad esempio $y(1)=2$:

$$2=1-1+ce^{-1}\Rightarrow ce^{-1}=2$$

$c=2e$: la

sol. di $\begin{cases}y'+y=t\\ y(1)=2\end{cases}$ è $\boxed{y(t)=t-1+2e^{1-t}}$

Dim. della Proposizione. Risolviamo $y'=a(t)y+b(t)$

$$y'(t)-a(t)y(t)=b(t).$$

<u>Idea</u>: cercare di vedere $y'(t)-a(t)y(t)$ come la derivata di un prodotto: cerchiamo un prodotto del tipo $y(t)e^{-A(t)}$: $(y(t)e^{-A(t)})'=\underbrace{(y'(t)-y(t)A'(t))}_{y'(t)-y(t)a(t)}e^{-A(t)}$

Scegliamo A tale che $A'=a$ cioè una qualunque primitiva di a (esiste perché a è continua)

$y'(t)-a(t)y(t)=b(t)$. Poniamo $A'=a$,

moltiplichiamo per $e^{-A(t)}$:

$$\underbrace{\left(y'(t)-a(t)y(t)\right)e^{-A(t)}}_{\left(y(t)e^{-A(t)}\right)'} = b(t)e^{-A(t)}$$

$$\left(y(t)e^{-A(t)}\right)' = b(t)\,e^{-A(t)}$$

Sia B una qualunque primitiva di $b(t)e^{-A(t)}$, cioè

$B'(t) = b(t)\,e^{-A(t)}$ (B esiste perché $b(t)e^{-A(t)}$ è continua)

$$\left(y e^{-A(t)}\right)' = B'$$

$$y(t)e^{-A(t)} = B(t)+C \Rightarrow \begin{cases} y(t) = Ce^{A(t)} + B(t)e^{A(t)} \\ A' = a \\ B' = be^{-A} \end{cases} \quad C\in\mathbb{R}$$

Fissato $t_0\in I$ e $y_0\in\mathbb{R}$, affinché $y(t_0)=y_0$

si sceglie C tale che

$$y_0 = Ce^{A(t_0)} + B(t_0)e^{A(t_0)} \Rightarrow$$

$$Ce^{A(t_0)} = y_0 - B(t_0)e^{A(t_0)} \Rightarrow C = y_0e^{-A(t_0)} - B(t_0)$$

#

$$y' = a(t)y + b(t) \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{c} y(t) = Ce^{A(t)} + B(t)e^{A(t)} \\ A'=a,\quad B'=be^{-A} \end{array}}$$

Il caso $b=0$: si dice che l'eq. è OMOGENEA

$$y' = a(t)y$$

le sol. sono $\boxed{y(t) = C\,e^{A(t)},\ C\in\mathbb{R}}$

sono multipli della soluzione $y(t) = e^{A(t)}$.
Si tratta di uno spazio vettoriale (nello spazio delle funzioni) di dimensione 1.

PROP. L'insieme delle soluzioni di

$$y' = a(t)y$$

è uno spazio vettoriale.

Dim. Le sol di $y'=a(t)y$ sono del tipo

$y(t) = Ce^{A(t)}, \quad C \in \mathbb{R}$:

si tratta (nello sp. vettoriale delle funzioni)

dei multipli del vettore $t \mapsto e^{A(t)}$. #

ESERCIZIO. Risolviamo $\begin{cases} y' = 2y+5 \\ y(0) = 3 \end{cases}$

Modo I

$$y' - 2y = 5$$

$$\underbrace{(y'-2y)e^{-2t}} = 5e^{-2t}$$

$$(ye^{-2t})' = 5e^{-2t} \Rightarrow y(t)e^{-2t} = \int 5e^{-2t}\,dt$$

$$\Rightarrow y(t)e^{-2t} = -\frac{5}{2}e^{-2t} + C$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{5}{2} + Ce^{2t}}$$

La soluzione t.c. $y(0)=3$ è tale che

$$3 = y(0) = -\frac{5}{2} + Ce^{2\cdot 0} = -5/2 + C$$

$$\Rightarrow C = 5/2 + 3 = \frac{11}{2} \Rightarrow \boxed{y(t) = -\frac{5}{2} + \frac{11}{2}e^{2t}}$$

Modo II usiamo la formula:

$$\underset{a(t)}{y' = 2y + 5}_{b(t)} \qquad y(t) = Ce^{A(t)} + B(t)e^{A(t)}, \quad A' = a \quad B' = be^{-A}$$

con $a(t) = 2$, $b(t) = 5$.

$$A' = 2 \Rightarrow A(t) = 2t + \text{cost}: \text{ scelgo } A(t) = 2t$$

$$B' = be^{-A} = 5e^{-2t} \Rightarrow \text{scelgo } B(t) = -\frac{5}{2}e^{-2t}$$

$$y(t) = Ce^{2t} - \frac{5}{2}e^{-2t}e^{2t} = Ce^{2t} - 5/2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

ESEMPIO $y' = y^2 - 1$ NON è lineare: non è del tipo

$y' = a(t)y + b(t)$

Es. Risolvere $\begin{cases} y' = \frac{y}{t} + t\cos t \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$ $t > 0$.

è del tipo $y' = a(t)y + b(t)$ $\quad a(t) = \frac{1}{t} \quad b(t) = t\cos t$
Consideriamo l'equazione nell'intervallo
$I =]0, +\infty[$.

$y' - \frac{y}{t} = t\cos t \qquad y e^{-\int \frac{1}{t} dt} - \frac{y}{t} e^{-\int \frac{1}{t} dt} = t\cos t\, e^{-\int \frac{1}{t} dt}$

Stiamo quindi moltiplicando per $e^{-\lg t} = \frac{1}{t}$:

$y' \frac{1}{t} - \frac{y}{t^2} = \left(y \frac{1}{t}\right)'$

$\left(y' - \frac{y}{t}\right)\frac{1}{t} = \cos t \Rightarrow \left(\frac{y}{t}\right)' = \cos t$

$\frac{y}{t} = \int \cos t + c \Rightarrow \frac{y}{t} = \sin t + c$

$y(t) = t\sin t + ct, \quad c \in \mathbb{R}.$

$y(\pi) = 1 \Longleftrightarrow 1 = \pi \underbrace{\sin \pi}_{=0} + c\pi \Rightarrow c = \frac{1}{\pi}$

la soluzione è $y(t) = t\sin t + \frac{t}{\pi}$ #