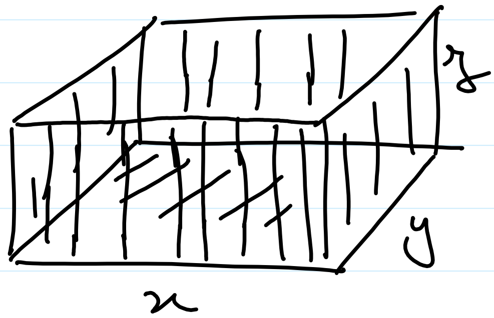
MASSIMI E MINIMI

ESEMPIO. Si dispone di $12\,m^2$ di cartone. Si vuole costruire una scatola senza coperchio di volume MASSIMO.

MASSIMO xyz



Area di cartone disponibile:
$$\begin{cases} xy + 2yz + 2xz = 12 \\ x>0,\ y>0,\ z>0 \end{cases}$$

Scrivendo z in funzione di x, y:

$$2(x+y)z = 12 - xy \Rightarrow z = \frac{12-xy}{2(x+y)}$$

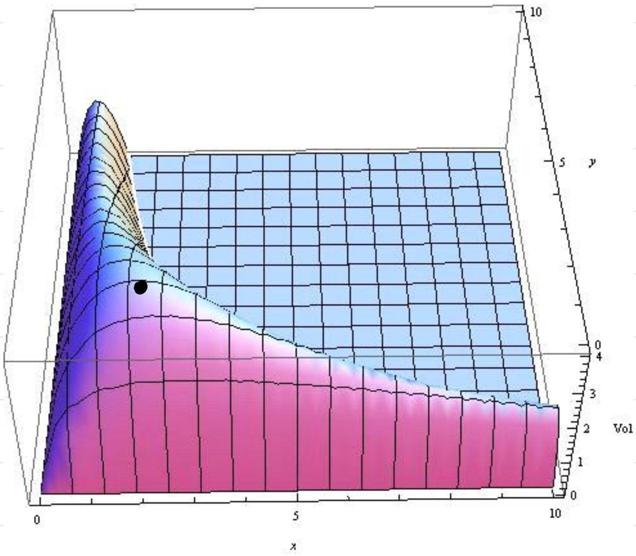
$$\text{MAX}\left\{ xy\left(\frac{12-xy}{2(x+y)}\right) : \ x>0,\ y>0 \right\}$$

$$f(x,y) = xy\,\frac{12-xy}{2(x+y)}$$

Esiste $(\bar{x},\bar{y}) : \bar{x}>0, \bar{y}>0,$

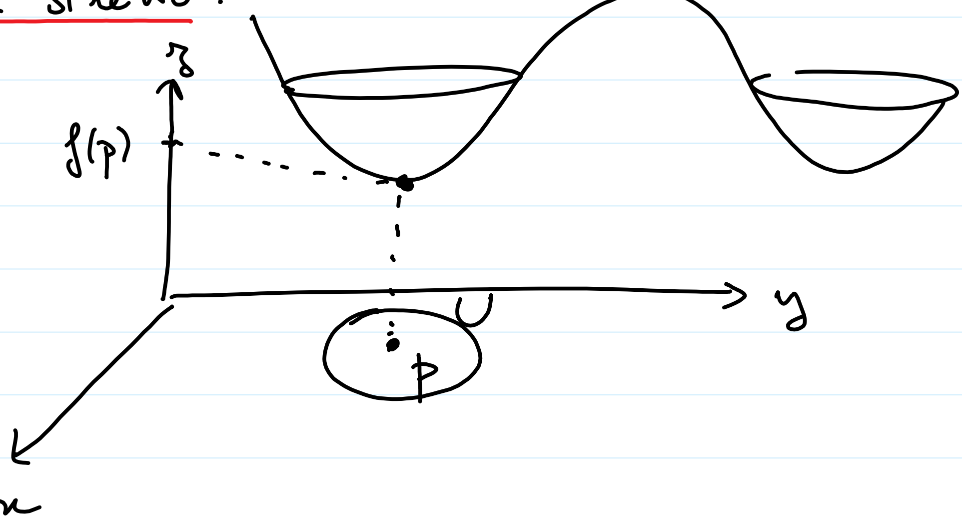
$$f(\bar{x},\bar{y}) \geq f(x,y) \quad \forall x,y>0 \ ?$$

Determinare $(\bar{x},\bar{y})$ in caso affermativo



DEFINIZIONE. $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. $p \in D$ è:

- <u>minimo</u> per f in D se $f(p) \leq f(x)$ $\forall x \in D$
- <u>minimo stretto</u> per f in D se $f(p) < f(x)$ $\forall x \in D \setminus \{p\}$
- <u>minimo locale</u> per f in D se esiste un intorno U di p tale che $f(p) \leq f(x)$ $\forall x \in D \cap U_p$
- <u>minimo locale stretto</u>:
  $f(p) < f(x)$
  $\forall x \in U \cap D \setminus \{p\}$



$f(p)$ = <u>valore</u> del minimo (locale)
p = <u>punto</u> di minimo (locale)

OSS. p è minimo locale se la

OSS. p è minimo locale se la disuguaglianza $f(x) \geq f(p)$ è soddisfatta in $U_p \cap D$, per qualche U_p intorno di p.

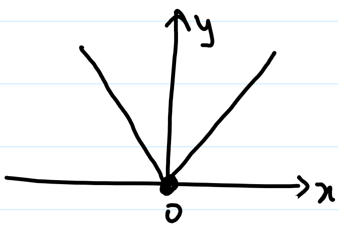
MAX/MIN in dimensione 1: verità e leggende.

SE $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile:

$$\begin{cases} p \text{ interno ad } I \\ p \text{ è min/massimo} \end{cases} \Rightarrow f'(p) = 0$$

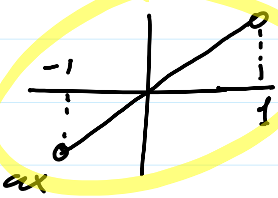
- Non pensare che per parlare di min/max serva la derivabilità

$|x|$ ha minimo, non è derivabile in 0.



- Il min/max può non esistere

$f(x) = x \qquad x \in]-1,1[$

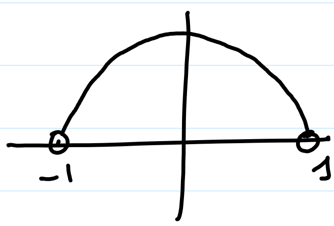


$f(]-1,1[) =]-1,1[$: f non ha min/max

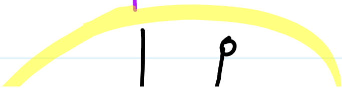
ha massimo.

- $f(x) = x^2$ in $]-1,1[$

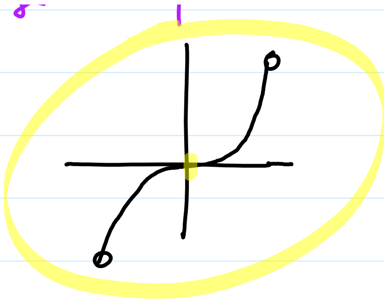
non ha minimo.



- Può essere $f'(p) = 0$ senza che p sia min o max

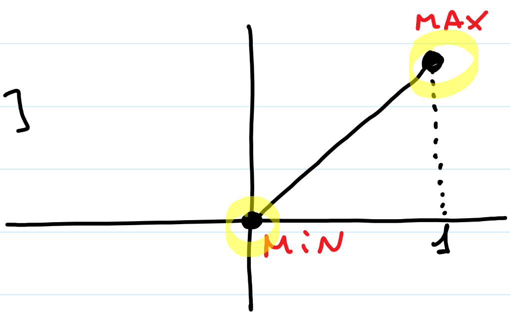


- $f(x) = x^3 \quad x \in]-1,1[$
non ha min/max, eppure
$f'(0) = 0$.



• Se f è derivabile, un punto NON interno può essere di min/max senza che si annulli la derivata

$f(x) = x, \quad x \in [0,1]$



ESISTENZA DI MIN/MAX ASSOLUTI

chiuso e limitato, es: $[0,1] \cup [3,4]$

• $f: C \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA $\Rightarrow$ f ha MAX/minimo ASSOLUTI

• $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = +\infty$
allora f ha minimo assoluto

(Esercizio)

CONDIZIONI NECESSARIE

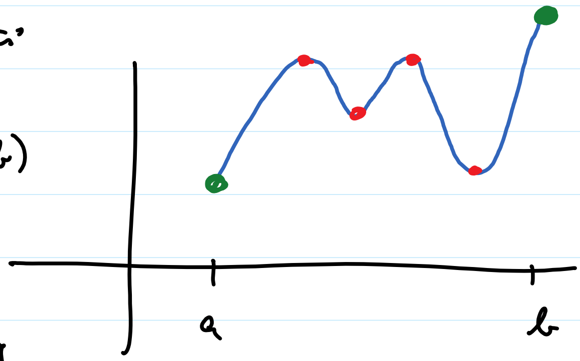
ordine 1

• Se $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile in p INTERNO ad I, p max o min locale
$\Rightarrow f'(p) = 0$.

Come trovare i MAX/MIN di $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile:

1) Test di $f' = 0$: si cercano gli x : $f'(x) = 0$; sia

1) Test di $f'=0$: si cercano gli $x \in]a,b[$: $f'(x)=0$; sia S, l'insieme di questi punti



2) Calcolo $f(a), f(b)$

Valore minimo di f:
$\min\{f(a), f(b), f(x) : x \in S_1\}$

CONDIZIONE SUFFICIENTE PER MIN/MAX LOCALI

- $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile 1 volta attorno a p, 2 volte in p. p punto interno ad I

a) Se $f'(p)=0$ e $f''(p)>0$ allora p è min. locale (stretto)

b) Se $f'(p)$ e $f''(p)<0$ allora p è max. locale (stretto)

[oss: se $f''>0$ in un intervallo la funzione è convessa

Es. dimostrarlo. $f''(p)>0$

$$\lim_{x\to p} \frac{f'(x)-f'(p)}{x-p} > 0 \Rightarrow \frac{f'(x)-\overbrace{f'(p)}^{0}}{x-p} > 0$$

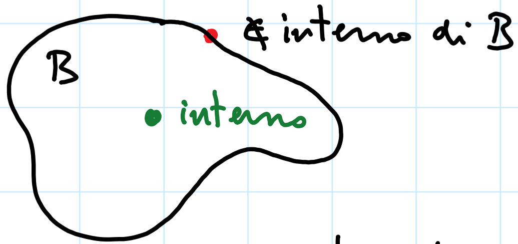
attorno a p eccetto p.

TOPOLOGIA di $\mathbb{R}^2$

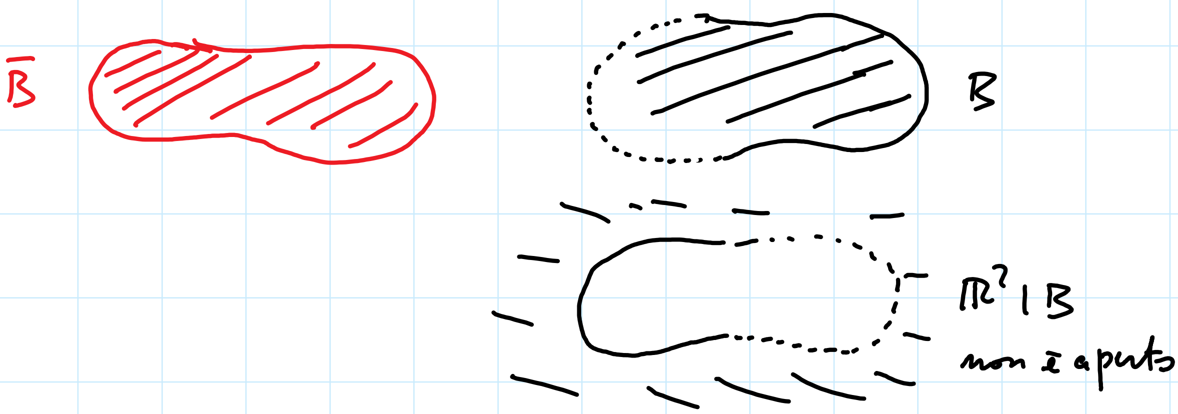
- $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è aperto $\Leftrightarrow \forall p \in A \ \exists r>0: B(p,r[\subseteq A$

- Se $B \subseteq \mathbb{R}^2$, p è interno a B se $\exists r>0: B(p,r[\subseteq B$

l'<u>interno di</u> B è l'insieme dei punti interni a B, si indica con $\mathring{B}$: si tratta del più grande aperto contenuto in B.



- $C \subseteq \mathbb{R}^2$ è chiuso $\Leftrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus C$ è aperto.
- $B \subseteq \mathbb{R}^2$ la chiusura di B, indicata con $\bar{B}$, è il più piccolo chiuso contenente B.



- La <u>frontiera</u> di B è $\bar{B} \setminus \mathring{B}$, si indica ∂B

<u>ESEMPIO</u> $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUE

$\{x \in \mathbb{R}^2 : f_1(x) > 0, \dots, f_n(x) > 0\}$ è aperto
(Verifica: per esercizio)

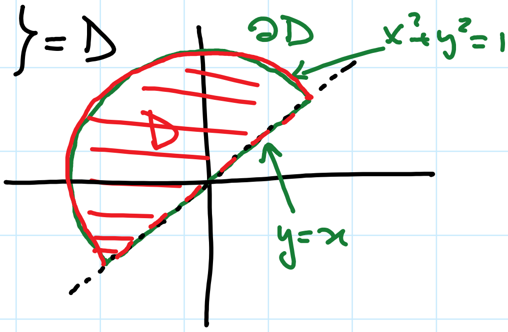
$\{(x,y) : \cos(x^2+y^2) - \lg(x^2+5) + \operatorname{sh}(x^2 - y^6) < 8\}$ è aperto

$\{x \in \mathbb{R}^2 : f_1(x) \geq 0, \dots, f_n(x) \geq 0\}$ è chiuso.

- $D = \{x : f(x) \geq 0\}$ o $D = \{x : f(x) > 0\}$ f continua.
  $\partial D = \{x : f(x) = 0\}$.
- $D = \{x : f(x) \gtreqless 0, \ g(x) \gtreqless 0\}$ con f, g continue:
  $\partial D = \{x : f(x) \geq 0, \ g(x) \geq 0 \ \text{e} \ f(x) = 0 \ \text{o} \ g(x) = 0\}$

<u>Es</u>. $\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1, \ y > x\} = D$

$\partial D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1, \ y \geq x \ \text{e} \ (x^2+y^2 = 1 \ \text{o} \ y = x)\}$



CONDIZIONI NECESSARIE IN DIMENSIONE 2

<u>DEF</u>. $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con derivate parziali. $p \in D$ è CRITICO se $\nabla f(p) = 0$

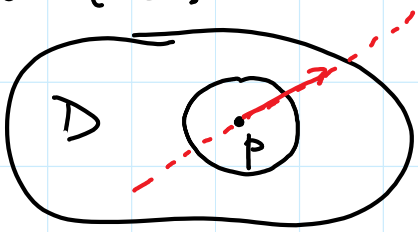
<u>ES</u>. $f(x,y) = x^3 - y^3$ $\quad \nabla f(0,0) = (0,0)$: $(0,0)$ è critico

CONDIZIONE NECESSARIA del I ordine
CRITERIO DEL GRADIENTE.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, p sia interno a D.

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, p sia interno a D.

f ammetta derivata direzionale in p rispetto ad un vettore $\vec{u}$.



$$\boxed{p \text{ min/max locale} \Rightarrow D_{\vec{u}} f(p) = 0}.$$

In particolare se esistono $\partial_x f(p)$, $\partial_y f(p)$:

$$\boxed{p \text{ min/max locale} \Longrightarrow \nabla f(p) = 0}$$

⇝ i punti CRITICI INTERNI sono candidati ad essere min/max locali

Dim. Sia $g(t) = f(p + t\vec{u})$. Sappiamo che

$D_{\vec{u}} f(p) = g'(0)$. Sia p minimo locale interno. Sappiamo che $f(p + t\vec{u}) \geq f(p)$ se $p + t\vec{u}$ è "vicino" a p: sia $r > 0$ tale che $f(x) \geq f(p)$ $\forall x \in B(p, r]$, cioè per $\|x - p\| \leq r$. Posto $x = p + t\vec{u}$:

$$\|p + t\vec{u} - p\| = |t| \leq r \text{ per } t \in [-r, r]$$

$$\Rightarrow \quad g(t) \geq g(0) \qquad \forall t \in [-r, r]$$

$$\begin{cases} 0 \text{ è di minimo locale per } g \\ 0 \text{ è interno a } [-r, r] \end{cases} \Rightarrow g'(0) = 0 \quad \#$$

ESEMPIO. $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

Determinare i punti critici (per forza interni)

Risolvere $\nabla f(x,y) = (0,0)$

Determinare i punti critici (per [illegible])

Risolvere $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 & (1) \\ -6x + 6y = 0 & (2) \Rightarrow y = x \end{cases}$$

$(1)\ 6x^2 - 6x = 0 \quad x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x = 1 \rightsquigarrow y = x = 1$

o

$x = 0 \rightsquigarrow y = x = 0$

Punti critici: $(0,0)$ e $(1,1)$

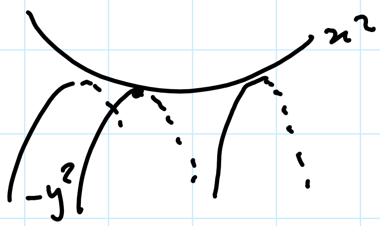
OSS. Se (x,y) è interno a D, $f: D \to \mathbb{R}$, $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$\not\Rightarrow$ (x,y) è minimo o massimo locale.

$f(x,y) = x^2 - y^2$

$\nabla f(x,y) = (2x, -2y) = (0,0)$

$\iff x = y = 0$

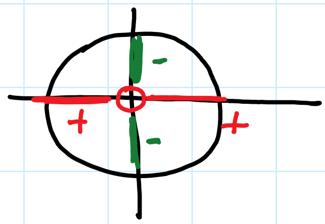


$(0,0)$ è critico. Non è né max né min locale:

in ogni intorno di $(0,0)$ f assume valori $> f(0,0) = 0$ e

$< f(0,0) = 0$.

Fissato $B((0,0), r]$: $\quad \underset{0<|x|<r}{f(x,0) = x^2 > 0} \;\Big|\; \underset{|y|<r}{f(0,y) = -y^2 < 0} \quad y \neq 0.$

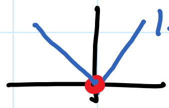


[In generale si studia il segno di $f(x,y) - f(p)$]

DEF. $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, p interno a D. p è di

sella se $\nabla f(p) = 0$ e p non è né massimo né sella se $\nabla f(p)=0$ e p non è né massimo né minimo locale.

OSS: Il criterio del gradiente non si applica nei punti del bordo di un dominio o nei punti dove la funzione non è derivabile: nella pratica spesso i punti di min/max capitano proprio dove la funzione non è derivabile: si pensi a $x \longmapsto |x|$ che ha minimo in 0



CONDIZIONE SUFFICIENTE del II ordine.

CRITERIO DELL'HESSIANO

Sia f derivabile due volte, $f \in \mathcal{C}^2$, $p \in \mathring{D}$.

Sia $\boxed{\nabla f(p) = 0}$

$$\mathrm{Hess} f(p) = \begin{pmatrix} \partial^2_{x,x} f(p) & \partial^2_{x,y} f(p) \\ \partial^2_{x,y} f(p) & \partial^2_{y,y} f(p) \end{pmatrix}$$

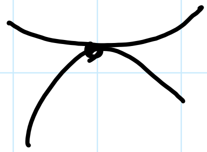
ES. $f(x,y)=x^2-y^2$ $\quad \nabla f(x,y)=(2x,-2y)$

$$\mathrm{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- Se $\det \mathrm{Hess} f(p) < 0$ $\quad p$ è di sella.

• Se $\det \text{Hess} f(p) < 0$ p è di sella.

ESEMPIO: $f(x,y) = x^2 - y^2$



$\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$

$\text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\det \text{Hess} f(0,0) = -4 < 0$.

• Se $\det \text{Hess} f(p) > 0$:

a) Se $\partial^2_{x,x} f(p) > 0 \Rightarrow p$ è minimo locale stretto

b) Se $\partial^2_{x,x} f(p) < 0 \Rightarrow p$ è di massimo locale stretto

(NON PUÒ ESSERE $\partial^2_{x,x} f(p) = 0$)

ESEMPI: a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

Pti critici: $\nabla f(x,y) = (0,0) \iff (2x, 2y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$.

$\text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\det \text{Hess} f(0,0) = 4 > 0$

$2 > 0 \Rightarrow$ min. locale stretto.

(in realtà è min. ASSOLUTO)

b) $f(x,y) = -x^2 - y^2$

$\nabla f(x,y) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$ $\text{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\det \text{Hess} f(0,0) = 4 > 0$; $-2 < 0 \Rightarrow (0,0)$ è MAX locale stretto

• Se $\det \text{Hess} f(p) = 0$: p può essere sella o min/max.

ESEMPIO, 1) $f(x,y) = x^4 + y^4$

$\nabla f(0,0) = 0$, $\det \text{Hess} f(0,0) = 0$; $(0,0)$ è minimo ASSOLUTO

2) $f(x,y) = -x^4 - y^4$

idem $\nabla f(0,0) = (0,0)$, det Hess $f(0,0) = 0$: $(0,0)$ MAX ASSOLUTO

3) $f(x,y) = x^4 - y^4$: $\nabla f(0,0) = (0,0)$; Hess $f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(0,0)$ è sella

ESEMPIO. $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

$\nabla f(x,y) = (6x^2 - 6y,\ 6y - 6x)$ Pti critici: $(0,0)$, $(1,1)$.

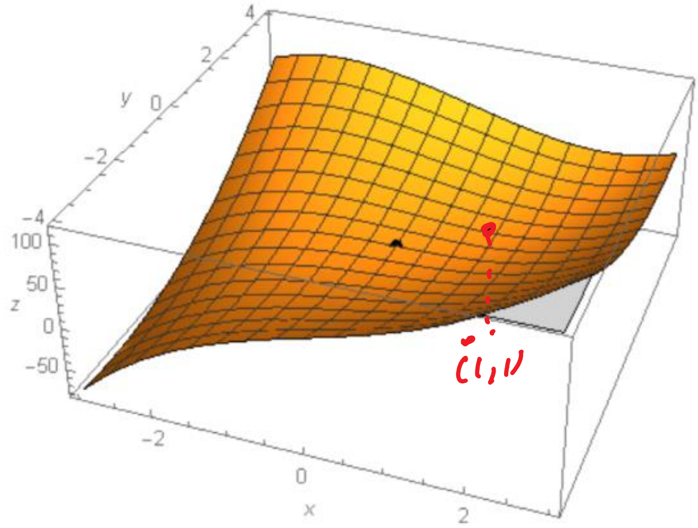
$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = 6 \boxed{\begin{pmatrix} 2x & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

- Hess $f(0,0) = 6 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ det Hess $f(0,0) = 6 \times (-1) = -6 < 0$

  $\Rightarrow (0,0)$ è SELLA.

- Hess $f(1,1) = 6 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ det $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$

  $2 > 0 \Rightarrow (1,1)$ è min. locale stretta



ESEMPIO. $f(x,y) = x^3 + (x-y)^2$

1) Punti critici:

$$\nabla f(x,y) = \left(3x^2 + 2(x-y),\ 2(y-x)\right)$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 3x^2 + 2(x-y) = 0 & (1) \\ y - x = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \iff y = x$. $\quad (1)\ 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \underset{(2)}{\Rightarrow} y = 0$; $(0,0)$ è l'unico punto critico.

2) $\text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Il criterio dell'Hessiano non fornisce nessuna informaz.!

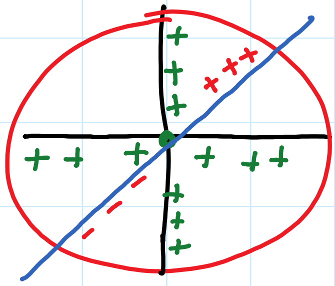
? $(0,0)$ minimo locale ? $\longrightarrow f(x,y) - f(0,0) \geq 0$ vera attorno a $(0,0)$

massimo locale? $\longrightarrow f(x,y) - f(0,0) \leq 0$ attorno a $(0,0)$

$$\Delta f^{(x,y)} = f(x,y) - f(0,0) = x^3 + (x-y)^2$$

? $x^3 + (x-y)^2 \geq 0$ in $B((0,0), r)$? per qualche $r > 0$?

$x^3 + (x-y)^2 \le 0$ in $B((0,0), r)$?



$y=0$: $\Delta f(x,0) = x^3 + x^2$

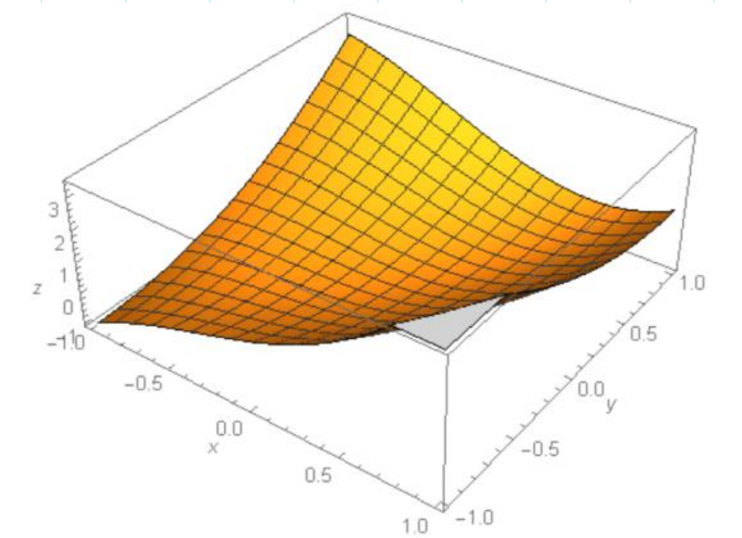
$= \underset{\substack{\uparrow \\ \ge 0}}{x^2}\,(\underbrace{x+1})$ in 0 vale 1 $\Rightarrow >0$ attorno a 0

$\Rightarrow \Delta f(x,0) > 0$ attorno a $x=0$, 0 escluso.

$\Delta f(0,y) = 0^3 + y^2 \ge 0$

Su $y=x$ $\quad \Delta f(x,y) = x^3 \begin{cases} >0 & x>0 \\ <0 & x<0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ è di SELLA.



ESERCIZIO: Determinare la natura dei punti critici di $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

ESEMPIO: la scatola di cartone

Nel problema della scatola di massimo volume con cartone di superficie limitata abbiamo considerato la funzione $f(x,y) = xy\,\dfrac{(12-xy)}{2(x+y)}$, definita per $x>0$, $y>0$.

Facendo i conti (ho usato il software Mathematica, lo ammetto) si trova:

```
D[x*y*(12 - x*y) / ((x + y)), x]
```

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{x\,y^2}{x+y} - \frac{x\,y\,(12-x\,y)}{(x+y)^2} + \frac{y\,(12-x\,y)}{x+y}\right) = \partial_x f(x,y)$$

```
Simplify[%]
```

$$-\frac{y^2\,(-12+x^2+2\,x\,y)}{(x+y)^2}$$

```
D[%, y]
```

$$-\frac{2\,x\,y^2}{(x+y)^2} + \frac{2\,y^2\,(-12+x^2+2\,x\,y)}{(x+y)^3} - \frac{2\,y\,(-12+x^2+2\,x\,y)}{(x+y)^2}$$

```
Simplify[%]
```

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{2\,x\,y\,(-12+x^2+3\,x\,y+y^2)}{(x+y)^3}\right) = \partial_y f(x,y)$$

```
Solve[{D[x*y*(12 - x*y) / ((x + y)), x] == 0,
  D[x*y*(12 - x*y) / ((x + y)), y] == 0}, {x, y}]
```

$\{\{x \to -2,\ y \to -2\},\ \{x \to 2,\ y \to 2\}\}$

Soluzioni di $\nabla f(x,y) = 0$.

L'unica soluzione $x>0, y>0$ è $(2,2)$.

La matrice hessiana in (x,y) è spaventosa:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{2xy^2}{(x+y)^2} - \frac{2y^2}{x+y} + \frac{2xy(12-xy)}{(x+y)^3} - \frac{2y(12-xy)}{(x+y)^2} & \frac{x^2y}{(x+y)^2} + \frac{xy^2}{(x+y)^2} - \frac{3xy}{x+y} + \frac{2xy(12-xy)}{(x+y)^3} - \frac{x(12-xy)}{(x+y)^2} - \frac{y(12-xy)}{(x+y)^2} + \frac{12-xy}{x+y} \\ \frac{x^2y}{(x+y)^2} + \frac{xy^2}{(x+y)^2} - \frac{3xy}{x+y} + \frac{2xy(12-xy)}{(x+y)^3} - \frac{x(12-xy)}{(x+y)^2} - \frac{y(12-xy)}{(x+y)^2} + \frac{12-xy}{x+y} & \frac{2x^2y}{(x+y)^2} - \frac{2x^2}{x+y} + \frac{2xy(12-xy)}{(x+y)^3} - \frac{2x(12-xy)}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

Calcolata in $(2,2)$ viene $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \doteq H$.

$-2<0$, $\det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 3 > 0$

$\Rightarrow (2,2)$ è massimo locale stretto.

Si può dimostrare che in realtà il MASSIMO ESISTE, ed è quindi assunto in $(2,2)$.

DOMINI CHIUSI

Teorema di WEIERSTRASS: $D \subseteq \mathbb{R}^2$ CHIUSO e LIMITATO (esiste R: $D \subseteq B(0,R)$),

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora f ha MASSIMO e MINIMO assoluto.

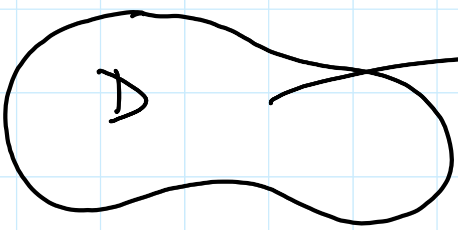
DEF. Un insieme COMPATTO in $\mathbb{R}^2$ è un insieme CHIUSO e LIMITATO

$$\boxed{X \text{ COMPATTO} \iff X \text{ CHIUSO e LIMITATO}}$$

OSS: 1) Le ipotesi del teorema di esistenza di Weierstrass sono continuità di f e dominio chiuso e limitato: la derivabilità non entra in gioco!

2) Abbiamo una ricetta per trovare i minimi/max locali nei punti interni al dominio per funzioni $\mathcal{C}^1$ o $\mathcal{C}^2$ attorno a quei punti.

COME AFFRONTARE LO STUDIO DI MIN/MAX SU UN DOMINIO CHIUSO E LIMITATO



- f con derivate parziali all'interno di D.
- f continua.

$\exists$ min/max ASSOLUTO (th. di Weierstrass)

Come trovarli?

1) punti interni $\Rightarrow$ il gradiente si annulla.
Si ottengono dei candidati interni.
NB: il criterio del gradiente vale solo per i punti INTERNI

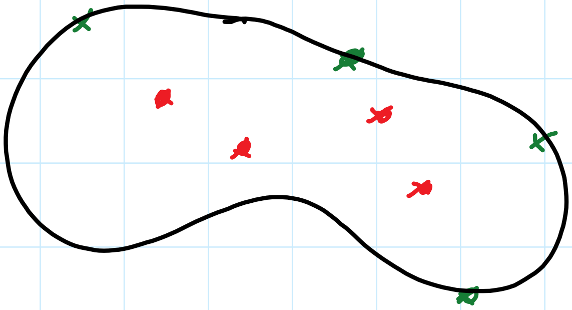
2) si considera il bordo: si studiano i MAX e MINIMI di f parametrizzando il bordo.
NB: spesso il bordo è unione di sostegno di curve. I valori di f sul sostegno di una curva $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ sono quelli della funzione di 1 variabile $(f \circ \gamma)(t)$.

ES $\{x^2+y^2 \leq 1\} = D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

Sul bordo: $(\cos t, \sin t)$: $t \in [0, 2\pi]$

f sul bordo assume i valori della funzione
$t \mapsto f(\cos t, \sin t)$, definita su $[0, 2\pi]$

3) Tirare le somme:



• = punti critici interni

• = punti di MASSIMO o MINIMO di f sul bordo

MAX f = MASSIMO tra i valori $f(\bullet)$, $f(\bullet)$ nei punti "candidati"

MIN f: MINIMO tra tutti i valori $f(\bullet), f(\bullet)$

ES. MAX / MIN di $f(x,y) = xy$ su
$$D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$$

1) Punti critici interni: $\nabla f(x,y) = (y, x)$
$$= (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

$S_1 = \{(0,0)\}$ $\quad f(0,0) = 0.$

2) Punti del bordo: $x^2+y^2 = 1$

Si tratta dei punti $(\cos t, \sin t)$: $t \in [0, 2\pi]$

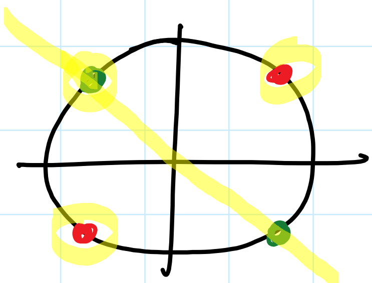
Si studia $f(\cos t, \sin t) = \cos t \sin t$
$$= \frac{1}{2} \sin 2t$$

MAX $f(\cos t, \sin t) = \frac{1}{2}$ se $\sin 2t = 1$
$$2t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightsquigarrow t = \frac{\pi}{4}, t = \frac{5\pi}{4}$$

MIN $f(\cos t, \sin t) = -\frac{1}{2}$ se $\sin 2t = -1$
$$2t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \to t = 3\pi/4, t = 7\pi/4$$

$$\text{MAX } f = \text{MAX}\left\{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$$

$$\text{MIN } f = \text{MIN}\left\{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\} = -\frac{1}{2}$$



$\bullet\ f = \frac{1}{2}$

$\bullet\ f = -\frac{1}{2}$

$(0,0)$ è min/max locale? $\quad \nabla(x,y) = (y, x) \Rightarrow \text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det \text{Hess} f(0,0) = -1 \Rightarrow (0,0)$ è sella.

OSS: A volte usare un pò di astuzia non guasta. Ad esempio:

$$\max\left\{(x^2+y^2)\, e^{-(x^2+y^2)} : x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \max\left\{ r e^{-r} : r \geq 0 \right\}$$