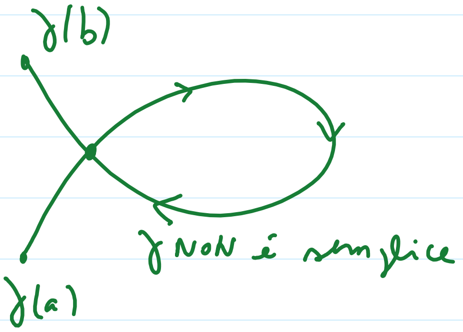
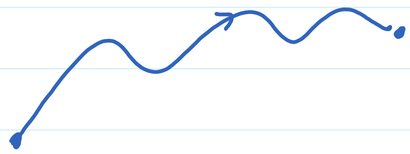
LA FORMULA DI GAUSS-GREEN

DEF. Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è <u>regolare</u> se $\gamma \in C^1$ e $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni t.
La curva si dice <u>semplice</u> se $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ per $a < s < t < b$ (si può avere $\gamma(a) = \gamma(b)$)

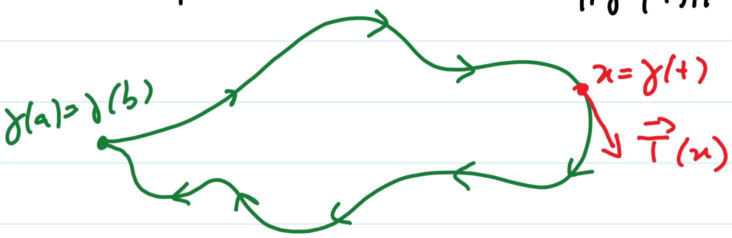




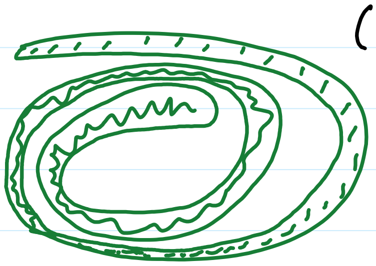
VETTORE TANGENTE UNITARIO IN UN PUNTO DEL SUPPORTO DI UNA CURVA

Se γ è regolare e semplice è definito il vettore tangente unitario a γ in ogni punto $x \in \gamma(]a,b[)$:

Se $\gamma(t) = x$ si pone $\vec{T}(x) := \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$.



OSS. Nel piano ogni curva chiusa e semplice divide il piano in 2 regioni: una limitata, l'altra illimitata (Th. di Jordan)



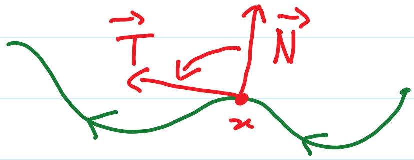
VETTORE NORMALE UNITARIO IN UN PUNTO DEL SUPPORTO DI UNA CURVA

Se γ è semplice, regolare vettore normale unitario a γ in $x \in \gamma(]a,b[)$ è

$$\vec{N}(x) = \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \quad , (x = \gamma(t))$$

Si noti che $\vec{N}(x) \perp \vec{T}(x)$ e che la base $(\vec{N}(x), \vec{T}(x))$ è positiva $(\det(\vec{N}(x), \vec{T}(x)) > 0)$.

cioè $\vec{N}, \vec{T}$ orientati come la base canonica.



UNA INTERPRETAZIONE DELL'INTEGRALE CURVILINEO di CAMPI VETTORIALI

Sia $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ semplice e regolare.

Sia poi $\vec{F} : \gamma([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ campo vettoriale continuo.

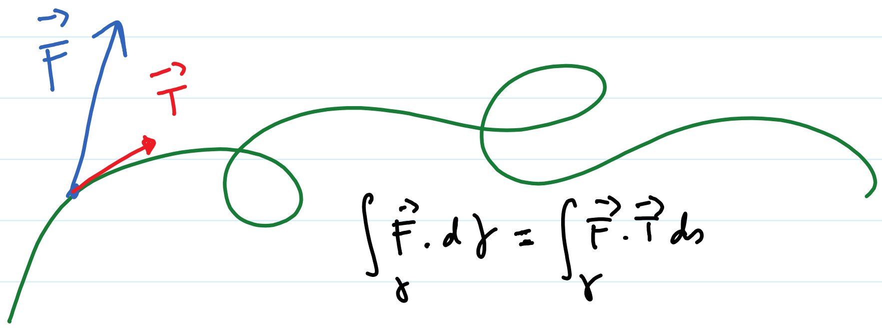
Si ha
$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

campo

$$= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \|\gamma'(t)\| dt$$

$$= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{T}(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

$$= \int_a^b \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{T}}_{\text{funzione a valori in } \mathbb{R}} ds .$$



$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

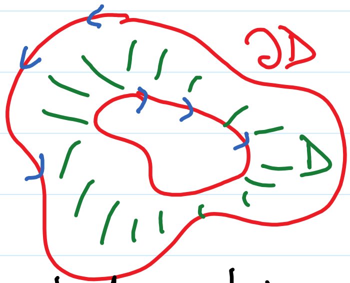
Per tale motivo si indica con $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{T} ds$

l'integrale del campo $\vec{F}$ su γ (una ulteriore l'integrale del campo $\vec{F}$ su γ (una ulteriore notazione!!)

BORDO POSITIVAMENTE ORIENTATO DI UN DOMINIO

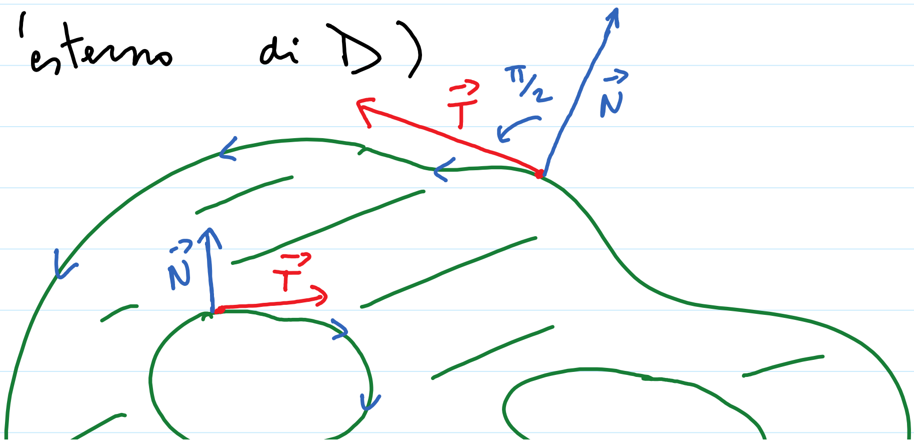
Se $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è chiuso la frontiera di D è

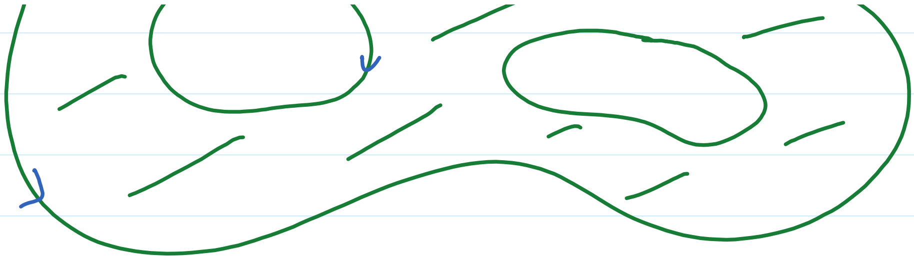
$$\partial D := D \setminus \mathring{D}$$



Considereremo insiemi limitati chiusi il cui bordo ∂D è unione disgiunta di curve regolari, chiuse, semplici $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.

Si dice che ∂D è orientato positivamente se "percorrendo le curve γ_i si lascia D a sinistra" (cioè il vettore normale $\vec{N}(x)$ in $x \in \mathrm{supp}\,\gamma_i$ punta all'esterno di D)





Scriveremo $\partial^+ D$ per indicare la giustapposizione di cammini $\gamma_1, \dots, \gamma_n$: si ha cioè

$$\int_{\partial^+ D} \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds = \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds + \dots + \int_{\gamma_n} \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$$

Formula di Gauss Green.

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ chiuso limitato con bordo orientato positiv. (indicato $\partial^+ D$). $\vec{F}$ definita su tutto D, non solo su ∂D!!

Sia $\vec{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ campo di classe $\mathcal{C}^1$.

Allora
$$\underbrace{\int_{\partial^+ D} \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds}_{\text{Lavoro di } \vec{F}} = \int_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\,dx\,dy \quad \leftarrow \text{integrale doppio.}$$

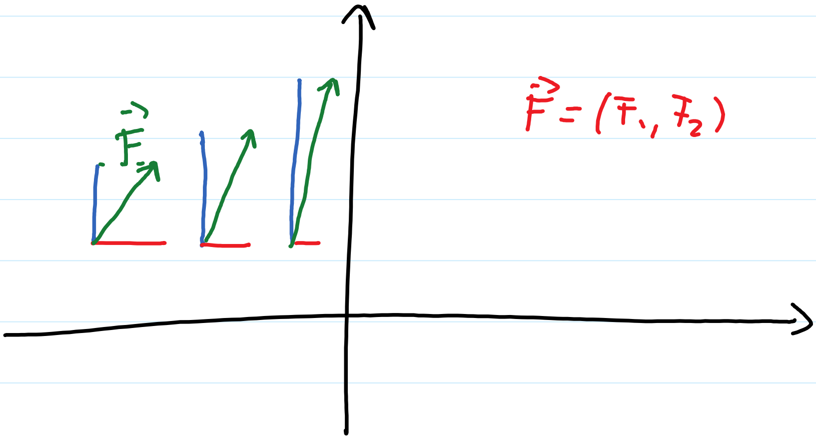
Formalmente: $\det \begin{pmatrix} \partial_x & F_1 \\ \partial_y & F_2 \end{pmatrix}$

(qui $\vec{F} = (F_1, F_2)$)

OSS: $\int_{\partial^+ D} \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds = \int_D \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \,dx\,dy$ è >0 se

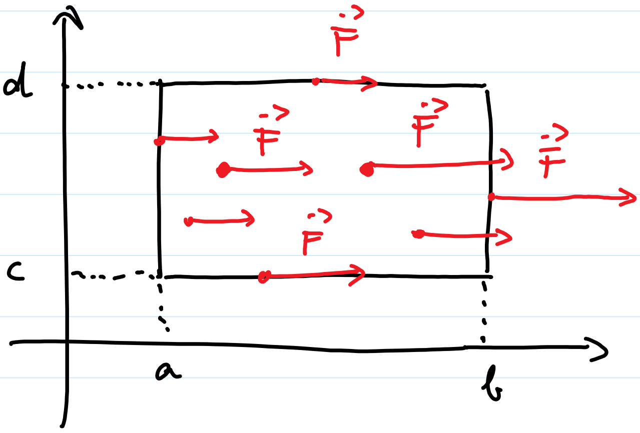
$\partial_x F_2 > 0$, $\partial_y F_1 < 0$

$\partial_x F_2 > 0$, $\partial_y F_1 < 0$



Dim. se D è un rettangolo, $D = [a,b] \times [c,d]$.

1) $\vec{F} = (F_1, 0)$:



$$\int_{\partial^+ D} \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds$$

$$= \int_{\partial^+ D} F_1 \, dx$$

$$= \int_a^b F_1(x,c) \, dx - \int_a^b F_1(x,d) \, dx$$

$$= -\int_a^b F_1(x,d) - F_1(x,c) \, dx = -\int_a^b \left\{ \int_c^d \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \, dy \right\} dx$$

$$= \int_D -\partial_y F_1(x,y) \, dx \, dy.$$

Analogamente, se $\vec{F} = (0, F_2)$ è $\int_{\partial^+ D} \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds = \int_D \partial_x F_2 \, dx \, dy$. #

ESEMPIO.

ESEMPÌO.

Calcolare $\displaystyle\int_{\partial^+ B(0,4)} (\sin x + y)\,dx + (-3x + e^{y^2})\,dy$

$\partial^+ B(p,r) :=$ bordo del disco centro p raggio r orientato posit.

Modo 1 (usando la def): $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

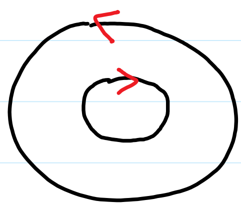
$$\int_0^{2\pi} \left(\sin(4\cos t) + 4\sin t\right)(-4\sin t) + \left(-3\cdot 4\cos t + e^{16\sin^2 t}\right) 4\cos t \, dt$$

Modo 2: campo è conservativo? $\partial_x(-3x + e^{y^2}) = -3$
NO $\qquad \partial_y(\sin x + y) = 1$ $\quad (-3 \neq 1)$

Th. Gauss-Green: $\displaystyle\int_{\partial^+ B(0,4)} \cdots\cdots = \int_{B(0,4)} \partial_x(-3x + e^{y^2}) - \partial_y(\sin x + y)\,dx\,dy$

$$= -\int_{B(0,4)} 4\,dx\,dy = -4\cdot\pi\cdot 4^2$$

Calcolo di $\displaystyle\int_{\partial^+(B(0,4)\setminus B(0,2))} \cdots\cdots\cdots = \int_{B(0,4)\setminus B(0,2)} -4\,dx\,dy$



$$= -4\left(\pi\cdot 4^2 - \pi\cdot 2^2\right)$$

OSS: Ricordiamo che se $\vec{F} = (F_1, F_2)$ è conservativo allora $\partial_x F_2 - \partial_y F_1 = 0$; in tal caso ovviamente $\displaystyle\int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy = 0$ $\forall \gamma$ circuito.
Il teorema di Gauss-Green dice che se γ è circuito positivamente orientato racchiudente un dominio D allora $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds = \int_D \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \,dx\,dy$.

un dominio D allora $\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds = \int_D \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \, dx\,dy$.

OSS. Nel T. di Gauss–Green si ha

$$\int_{\partial^+ D} \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds = \int_D \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \, dx\,dy$$

se $\vec{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Si noti che mentre per definire $\int_{\partial^+ D} \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$ è sufficiente che $\vec{F}$ sia definito nel sostegno di $\partial^+ D$; per calcolare $\int_D \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \, dx\,dy$ è necessario che $\vec{F}$ sia definito su tutto D.

Un uso improprio del Teorema di Gauss-Green può portare a risultati falsi.

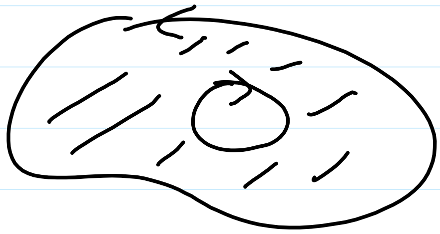
ESEMPIO. $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} , \frac{x}{x^2+y^2} \right) \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Abbiamo visto che $\int_{\partial^+ B(0,1)} \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds = 2\pi$

↑ circolo unitario

Si ha invece $\partial_y \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \partial_x \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right)$: se uno "dimentica" che il campo non è definito in (0,0) è $\int_{B(0,1)} \partial_y F_2 - \partial_x F_1 \, dx\,dy = 0$!

APPLICAZIONE AL CALCOLO DELLE AREE.

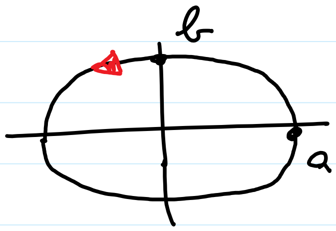


$$\int_{\partial^+ D} F_1\,dx + F_2\,dy = \int_D \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \,dx\,dy$$

- $F_2(x,y)=x$, $F_1(x,y)=0 \longrightarrow \int_{\partial^+ D} x\,dy = \int_D 1 = \text{Area}(D)$
- $F_1(x,y)=-y$, $F_2(x,y)=0$: $\int_{\partial^+ D} -y\,dx = \int_D 1\,dx\,dy = \text{Area}(D)$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Area}(D) = \int_{\partial^+ D} x\,dy = \int_{\partial^+ D} -y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial^+ D} x\,dy - y\,dx}$$

ESEMPIO $D = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$: ellisse



$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial^+ D} x\,dy - y\,dx$$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

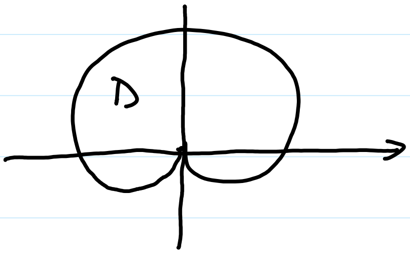
$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t) - (b\sin t)(-a\sin t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\cos^2 t + ab\sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} 1\,dt = \pi ab.$$

ESEMPIO $D \subseteq \mathbb{R}^2$ abbia come bordo (orientato positivamente) la curva descritta in coordinate polari da $\rho(t)$, $t \in [a, b]$:

$$(\rho(t)\cos t,\ \rho(t)\sin t) \leftarrow$$

Calcolare l'area di D in termini di $\rho(t)$.
Dedurre l'area della cardioide $(\rho(t) = 1+\sin t)$



$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial^+ D} x\,dy - y\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\rho(t)\cos t)(\rho'(t)\sin t + \rho(t)\cos t) - \rho(t)\sin t\,(\rho'(t)\cos t - \rho(t)\sin t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(t)(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(t)\,dt$$

Es. Cardioide: $\rho(t) = 1+\sin t$

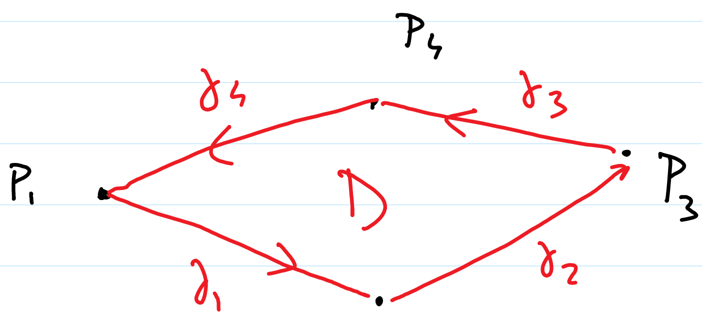
$$\text{Area}: \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\sin t)^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 + 2\sin t + \sin^2 t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 + \sin^2 t\,dt$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2\pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt \qquad \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$$

$$= \pi + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1-\cos 2t)\,dt = \pi + \frac{1}{4}\cdot 2\pi = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Es.



$$P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

P_2

Applicare la formula Area $D = \frac{1}{2}\int_{\gamma_1} x\,dy - y\,dx + \frac{1}{2}\int_{\gamma_2} \dots$

$+ \frac{1}{2}\int_{\gamma_4} x\,dy - y\,dx$.

$\gamma_1(t) = P_1 + t\overrightarrow{P_1P_2} \qquad t \in [0,1]$

$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \quad : \; t \in [0,1]$

$$\int_{\gamma_1} x\,dy - y\,dx = \int_0^1 (x_1 + t(x_2 - x_1))(y_2 - y_1) - (y_1 + t(y_2 - y_1))(x_2 - x_1)\,dt$$

$$= \int_0^1 x_1y_2 - x_2y_1\,dt = x_1y_2 - x_2y_1,$$

analogamente $\int_{\gamma_i} x\,dy - y\,dx = x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i$. $\quad \begin{pmatrix} x_{n+1} = x_1 \\ y_{n+1} = y_1 \end{pmatrix}$

Si ottiene quindi $\boxed{\text{Area}(D) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i)}$