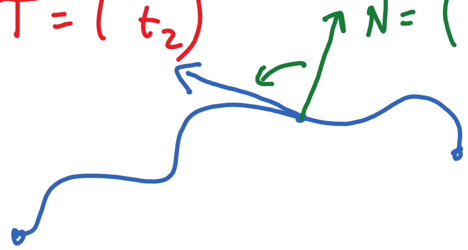
Osserviamo che se $\vec{F}$ è campo in $\mathbb{R}^2$ e γ una curva semplice, $\vec{T}$ vettore tangente e $\vec{N}$ vettore normale in un punto del suo sostegno (con $(\vec{N}, \vec{T})$ base positiva) si ha:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{T} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{N} = \begin{pmatrix} t_2 \\ -t_1 \end{pmatrix}$$



$$\boxed{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{N}} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_2 \\ -t_1 \end{pmatrix} = F_1 t_2 - F_2 t_1$$

$$= \begin{pmatrix} -F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} \cdot \vec{T}}$$

Ciò è alla base del teorema della divergenza nel piano.

Th divergenza

martedì 8 novembre 2016   22:36

Teorema (della divergenza)

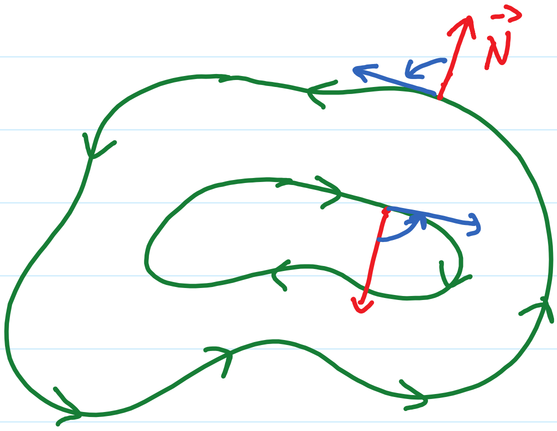
- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ con bordo costituito da una unione finita di sostegni di curve semplici, regolari.

- $\vec{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ di classe $\mathcal{C}^1$, $\vec{F} = (F_1, F_2)$

Allora

$$\underbrace{\boxed{\int_{\partial^+ D} \vec{F} \cdot \vec{N} \, ds}}_{\text{Flusso di } \vec{F} \text{ uscente da } D} = \int_D \overbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right)}^{\operatorname{div} \vec{F}(x,y)} dx\, dy$$

$(\vec{N} : (\vec{N}, \vec{T})$ base positiva$)$



Dim. Se $x \in \operatorname{supp} \gamma$ e $x = \gamma(t)$,

$$\vec{T}(x) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \quad \text{si ha}$$

$$\vec{N}_{ext}(x) = \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Sia $\partial^+ D = \operatorname{supp} \gamma_1 \cup \dots \cup \operatorname{supp} \gamma_n$,
$\gamma_i : [a_i, b_i] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\int_{\partial^+ D} \vec{F} \cdot N_{ext} \, ds = \sum_i \int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot \vec{N}_{ext} \, ds$$

$$\int_{\partial^+ D} \quad {}^{ext} \qquad\qquad i \quad \int_{\gamma_i}$$

$$= \sum_i \int_{a_i}^{b_i} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{N}(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt$$

$$= \sum_i \int_{a_i}^{b_i} F_1(\gamma(t))\,\gamma_2'(t) - F_2(\gamma(t))\,\gamma_1'(t) \, dt$$

$$= \sum \int_{\gamma_i} \begin{pmatrix} -F_2(\gamma(t)) \\ F_1(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \sum \int_{\gamma_i} \begin{pmatrix} -F_2(\gamma(t)) \\ F_1(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}}_{\vec{T}(\gamma(t))} \|\gamma'(t)\| \, dt$$

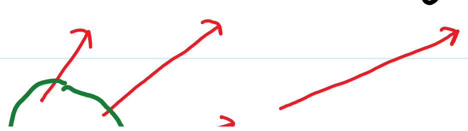
$$= \int_{\partial^+ D} \begin{pmatrix} -F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} \cdot \vec{T} \, ds$$

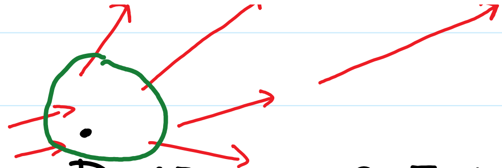
$$= \int_D \begin{vmatrix} \partial_x & -F_2 \\ \partial_y & F_1 \end{vmatrix} dx\,dy = \int_D \partial_x F_1 + \partial_y F_2 \, dx\,dy \qquad \#$$

↑ Gauss-Green

OSS. Se $\vec{F} = (F_1, F_2)$, $\partial_x F_1 + \partial_y F_2$ è la divergenza di $\vec{F}$, indicata con $\operatorname{div} \vec{F}(x,y)$

ES. $\operatorname{div} \vec{F}(x,y) > 0$ se $\partial_x F_1 > 0$ e $\partial_y F_2 > 0$





$P=(\bar{x},\bar{y})$, $\partial_x F_1(\bar{x},\bar{y})>0$

$\partial_y F_2(\bar{x},\bar{y})>0$

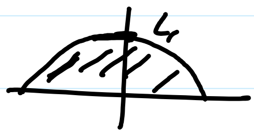
Oss: $\displaystyle\int_{\partial^+ D} \vec{F}\cdot\vec{N}$ è il "flusso di $\vec{F}$ uscente da D".

Se $\vec{F}$ è il campo di velocità di un fluido,

$\displaystyle\int_{\partial^+ D} \vec{F}\cdot\vec{N}$ è la quantità di liquido che "esce" da D nell'unità di tempo.

Es. Calcolare $\displaystyle\int_{\partial^+ D} \vec{F}\cdot\vec{N}\,ds$, se

$D=\{(x,y):\ \boxed{0\le y\le 4-x^2},\ x\in[-2,2]\}$,



$\boxed{\vec{F}(x,y)=(y,\ xy)}$

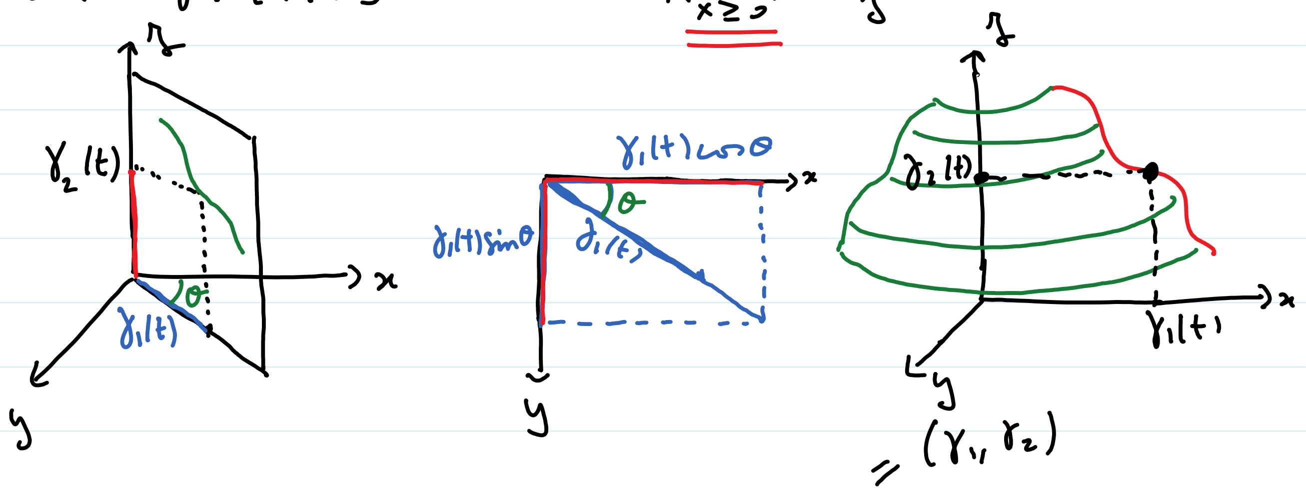
Th. della divergenza: $\displaystyle\int_{\partial^+ D} \vec{F}\cdot\vec{N}\,ds = \int_D \operatorname{div}\vec{F}$

$$= \int_D \frac{\partial}{\partial x} y + \frac{\partial}{\partial y}(xy)\,dx\,dy$$

$$= \int_D x\,dx\,dy = 0.$$

SUPERFICIE DI ROTAZIONE.

Sia $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 = \underline{\mathbb{R}_{x\geq 0}} \times \mathbb{R}_z$



La superficie ottenuta ruotando γ attorno all'asse z di un angolo $\alpha \in [0, 2\pi]$:

$$\boxed{p_\alpha(t,\theta) = (\gamma_1(t)\cos\theta,\ \gamma_1(t)\sin\theta,\ \gamma_2(t)), \quad t \in [a,b],\ \theta \in [0,\alpha]}$$

Se $\gamma \in C^1$ si tratta di una superficie parametrica

Teorema (Area di una superficie di rotazione)

$$\text{Area}(p_\alpha) = \alpha \int_\gamma x\, ds = \alpha\, \bar{x}_\gamma \times \text{Lunghezza}(\gamma)$$

con $\bar{x}_\gamma$ = ascissa del baricentro di γ
= distanza del baricentro di γ dall'asse di rotazione.

Dim. $p_\alpha(t,\theta) = (\gamma_1(t)\cos\theta,\ \gamma_1(t)\sin\theta,\ \gamma_2(t))$ $\quad t \in [a,b]$, $\theta \in [0,\alpha]$

$$\partial_t p_\alpha(t,\theta) = (\gamma_1'(t)\cos\theta,\ \gamma_1'(t)\sin\theta,\ \gamma_2'(t))$$

$$\partial_\theta p_\alpha(t,\theta) = (-\gamma_1(t)\sin\theta,\ \gamma_1(t)\cos\theta,\ 0)$$

$$\begin{vmatrix} \gamma_1'\cos\theta & \gamma_1'\sin\theta \\ -\gamma_1\sin\theta & \gamma_1\cos\theta \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_1'\cos\theta & \gamma_2' \\ -\gamma_1\sin\theta & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_1'\sin\theta & \gamma_2' \\ \gamma_1\cos\theta & 0 \end{vmatrix}^2$$

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ -\gamma_1 \sin\theta & \gamma_1 \cos\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ -\gamma_1 \sin\theta & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \gamma_1 \cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$(\gamma_1'\gamma_1)^2 + \underbrace{\gamma_1^2 \gamma_2'^2 \sin^2\theta + \gamma_1^2\gamma_2'^2 \cos^2\theta}_{} = (\gamma_1'\gamma_1)^2 + (\gamma_1\gamma_2')^2$$

$$= \gamma_1^2 (\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2)$$

$$= \gamma_1^2 \|\gamma'\|^2$$

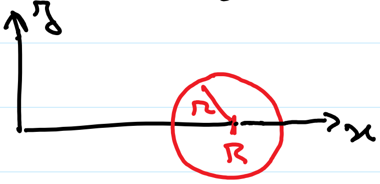
$$\text{Area}(p_\alpha) = \int_{\substack{[a,b]_t \\ [0,\alpha]_\theta}} \gamma_1(t) \|\gamma'(t)\| \, dt \, d\theta$$

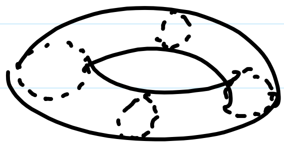
$$= \alpha \int_a^b \gamma_1(t) \|\gamma'(t)\| \, dt = \alpha \int_\gamma x \, ds \quad \#$$

ES (Toro "vuoto"). L'area della superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare un cerchio di centro $(R,0)$ e raggio $r < R$ attorno all'asse z è

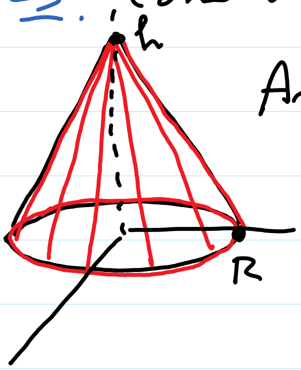
Area

$2\pi \times R \times 2\pi r$

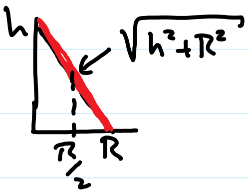




ES. Cono di base cerchio $\partial B(0,R) \subseteq \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$, altezza h:

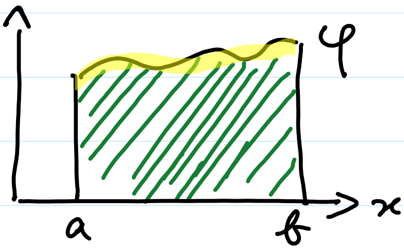


Area della superficie laterale = ?



$$2\pi \times \frac{R}{2} \times \sqrt{h^2+R^2} = \pi R \underbrace{\sqrt{h^2+R^2}}_{\text{apotema}}$$

ESERCIZIO.



$a > 0$

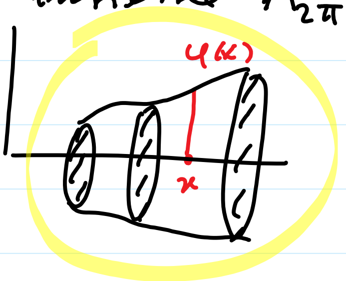
$\varphi : [a,b] \to [0,+\infty[$

Facciamo ruotare l'insieme

$A = \{(x,z) : x \in [a,b], \ 0 \le z \le \varphi(x)\}$ attorno

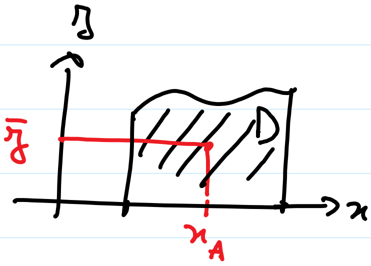
$A = \{(x,y) : x \in [a,b],\ 0 \le y \le \varphi(x)\}$ attorno all'asse x: otteniamo l'insieme $A_{2\pi}$. Calcolo di $Vol(A_{2\pi})$?

- Metodo 1 :



$$\int_a^b \text{Aree } x\text{-sezioni} = \int_a^b \pi \varphi^2(x)\,dx$$

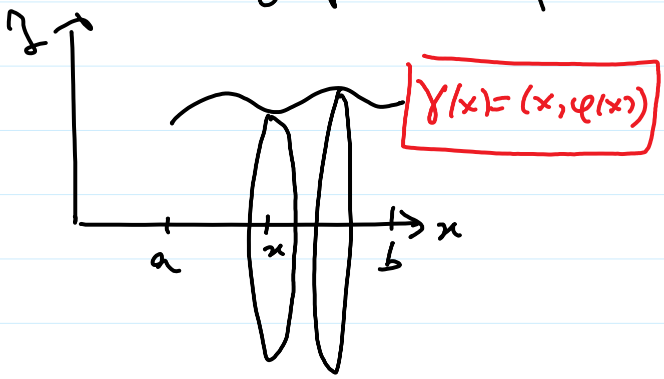
- Metodo 2 (Formula di Guldino):



$$2\pi \int_D y\,dx\,dy = 2\pi \int_a^b \left\{ \int_0^{\varphi(x)} y\,dy \right\} dx$$

$$= 2\pi \int_a^b \frac{1}{2}\varphi^2(x)\,dx = \int_a^b \pi \varphi^2(x)\,dx$$

ESEMPIO. Calcoliamo l'area della superficie P_α di rotazione ottenuta ruotando il grafico di φ attorno all'asse x



$$\text{Area}(P_\alpha) = ?$$

$$2\pi \int_\gamma y\,ds = 2\pi \int_a^b \varphi(x)\,\|\gamma'(x)\|\,dx$$

$$= 2\pi \int_a^b \varphi(x)\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx$$

L'integrale delle lunghezze dei cerchi di raggio $\varphi(x)$

$$\underbrace{\int_a^b 2\pi\varphi(x)\,dx}_{\text{integrale lungh. dei cerchi}} \neq \underbrace{\int_a^b 2\pi\varphi(x)\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx}_{\text{Area della sup. di rot}}$$