...lio 1 Soluzioni

...nsemi

1) $E = \{ (\frac{1}{2})^n , n \in \mathbb{N} \}$.

Dato che $0 < \frac{1}{2} < 1$ si ha che $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^m$ $\forall n > m$

Quindi $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$1 = \sup E$ e inoltre $1 = \max E$ (corrisponde a $n=$...

Ora osserviamo che $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$ $\forall n$, quindi 0 è un minorante. Voglio mostrare che NON ESISTONO MINORANTI MAGGIORI DI ZERO

Sia $x > 0$. ~~Allora esiste~~ Mi chiedo se esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x > \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0}$ (e in questo caso x non è un minorante di E)

$$x > \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} \iff \frac{1}{x} < 2^{n_0} \iff \lg\left(\frac{1}{x}\right) < \lg 2^{n_0} \iff$$

$$\lg\left(\frac{1}{x}\right) < n_0 \lg 2 \iff n_0 > \frac{\lg(1/x)}{\lg 2}.$$

Dunque ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \frac{\lg 1/x}{\lg 2}$ soddisfa $x > \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Rightarrow$ x non è minorante. $\Rightarrow$ 0 è il maggiore dei minoranti $0 = \inf E$. 0 non è $\min E$.

2) $E = \{ 2 + (-1)^n \frac{1}{n+1} , n \in \mathbb{N} \}$.

n pari $\Rightarrow$ $n = 2m$ $\exists m \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ ~~$2+(-1)^n \frac{1}{n+1} = 2 + \frac{1}{2m+1}$~~

$$2 + (-1)^n \frac{1}{n+1} = 2 + (-1)^{2m} \frac{1}{2m+1} = 2 + \frac{1}{2m+1}$$

n dispari $\Rightarrow$ $n = 2m+1$ $\Rightarrow$ $2 + (-1)^n \frac{1}{n+1} = 2 + (-1)^{2m+1} \frac{1}{2m+1+1}$

$= 2 - 1$

Dunque

$$E = \left\{ 2 + \frac{1}{2m+1},\ m \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ 2 - \frac{1}{2m+2},\ m \in \mathbb{N} \right\}.$$ (2)

$$2 < 2 + \frac{1}{2m+1} \leq \underbrace{2 + \frac{1}{1} = 3}_{\to \text{ scelgo } m=0} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\underbrace{2 - \frac{1}{2}}_{\text{scelgo } m=0} \leq 2 - \frac{1}{2m+2} < 2$$

Dunque $\sup E = 3 = \max E$ (corrispondente a $n=0$)

$\inf E = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \min E$. (corrisp a $n=1$)

3) $E = \{ n^2(\cos(n\pi) - 1),\ n \in \mathbb{N} \}$

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Dunque $n^2(\cos(n\pi) - 1) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -2n^2 & \text{se } n \text{ è dispari}. \end{cases}$

Ora $-2n^2 < 0 \quad \forall n \neq 0$

Dunque $\sup E = 0 = \max E$

mentre $\inf E = -\infty$ (l'insieme ~~è~~ NON è limitato inferiormente).

4) $E = \left\{ (-1)^n - \frac{1}{n+1} \right\}$

n pari $\Rightarrow$ $n = 2m$ $\quad (-1)^n - \frac{1}{n+1} = (-1)^{2m} - \frac{1}{2m+1} =$

$$= 1 - \frac{1}{2m+1}$$

n dispari $\Rightarrow$ $n = 2m+1$

$$(-1)^n - \frac{1}{n+1} = (-1)^{2m+1} - \frac{1}{2m+1+1} = -1 - \frac{1}{2m+2}$$

$$E = \left\{ 1 - \frac{1}{2m+1},\ m \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ -1 - \frac{1}{2m+2},\ m \in \mathbb{N} \right\}.$$ (3)

$$0 \leq 1 - \frac{1}{2m+1} < 1 \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

scelgo $m=0$

$$-\frac{3}{2} = \underbrace{-1-\frac{1}{2}}_{\text{scelgo } m=0} \leq -1 - \frac{1}{2m+2} < -1 \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

Dunque ~~sup~~ $\underline{\inf E = -\frac{3}{2} = \min E}$ (corrisponde alla scelta $n=1$ $(-1)^1 - \frac{1}{1+1} = -\frac{3}{2}$)

Ora 1 è un maggiorante di E. Voglio mostrare che è il <u>minore</u> dei maggioranti.
Fisso $0 < x < 1$ e voglio mostrare che esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $1 - \frac{1}{2m+1} > x$ (allora x <u>non</u> è maggiorante).

$$1 - \frac{1}{2m+1} > x \iff 1 - x > \frac{1}{2m+1} \underset{(1-x)>0!}{\iff} \frac{1}{1-x} < 2m+1$$

$$\iff 2m > \frac{1}{1-x} - 1 \iff m > \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} - 1\right].$$

se scelgo $m > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)$ allora $1 - \frac{1}{2m+1} > x \Rightarrow x$ <u>non</u> è un maggiorante!

~~sup~~ Dunque $\sup E = 1$

1 <u>non</u> è il max E perché $1 - \frac{1}{2m+1} < 1 \ \forall m$