# Funzioni - Soluzioni

1) $f(x) = \arcsen |x^3 - \frac{1}{2}|$

DOMINIO $\underbrace{-1 \leq |x^3 - \frac{1}{2}|}_{\text{sempre verificata}} \leq 1 \Rightarrow \underline{|x^3 - \frac{1}{2}| \leq 1}$

sempre verificata
modulo è POSITIVO!

$$\begin{cases} x^3 \geq \frac{1}{2} \\ x^3 - \frac{1}{2} \leq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x^3 \leq \frac{1}{2} \\ -x^3 + \frac{1}{2} \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 \geq \frac{1}{2} \\ x^3 \leq \frac{3}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x^3 \leq \frac{1}{2} \\ -x^3 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x^3 \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \leq x^3 \leq \frac{3}{2} \quad \cup \quad -\frac{1}{2} \leq x^3 \leq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \leq x^3 \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \leq x \leq \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

$$D = \left\{ x \mid -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \leq x \leq \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \right\} = \left[ -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \right]$$

SEGNO $\arcsin |x^3 - \frac{1}{2}| \geq 0 \Leftrightarrow |x^3 - \frac{1}{2}| \geq 0$ sempre verificata

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D, \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

SIMMETRIE $f(-x) = \arcsin |-x^3 - \frac{1}{2}|$

$f(-x) \neq f(x)$ f non è pari
$f(-x) \neq -f(x)$ f non è dispari

PERIODICITÀ arcsen x non è periodica
f non è periodica

2) $f(x) = \lg|\sin(2e^x)|$

<u>DOMINIO</u> $|\sin(2e^x)| > 0 \iff \sin(2e^x) \neq 0 \iff$

$\iff 2e^x \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \underbrace{e^x \neq \frac{k\pi}{2}}_{*} \quad k = 1, 2 \ldots$

$* \Rightarrow x \neq \lg\left(\frac{k\pi}{2}\right) \quad \forall k = 1, 2 \ldots$
$k \in \mathbb{N} \; k \neq 0.$

$D = \{ x \mid x \neq \lg\left(\frac{k\pi}{2}\right), k \in \mathbb{N}, k \neq 0 \}.$

<u>SEGNO</u> $\lg|\sin(2e^x)| \geq 0 \iff |\sin(2e^x)| \geq 1 \iff$

$|\sin(2e^x)| = 1 \iff 2e^x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sin 2e^x = 1$ oppure $-1$ ↗

$\iff e^x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad k = 0, 1 \ldots \quad k \in \mathbb{N}.$

$x = \lg\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right).$

Dunque $f(x) = 0 \iff x = \lg\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)$

altrimenti $f(x) < 0$. $(\forall x \in D \; \cdot \; x \neq \lg\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)$

<u>SIMMETRIE</u> $f(-x) = \lg|\sin(2e^{-x})|$

$f(-x) \neq f(x)$ $f$ non è pari

$f(-x) \neq -f(x)$ $f$ non è dispari

<u>PERIODICITÀ</u> $e^x$ <u>non</u> è periodica, quindi la funzione non è periodica.

3) $f(x) = \lg(e^{2x} - 4e^x + 4)$

$e^x = t \quad e^{2x} = (e^x)^2 = t^2$

<u>DOMINIO</u> $e^{2x} - 4e^x + 4 > 0$

$t^2 - 4t + 4 > 0$

$(t-2)^2 > 0 \iff t \neq 2 \iff e^x \neq 2$

$\iff x \neq \lg 2$

$D = \{ x \mid x \neq \lg 2 \} = (-\infty, \lg 2) \cup (\lg 2, +\infty).$ 

<u>SEGNO</u> $\quad \lg(e^{2x} - 4e^x + 4) \geq 0 \iff e^{2x} - 4e^x + 4 \geq 1$

$t = e^x \qquad t^2 - 4t + 4 \geq 1 \iff t^2 - 4t + 3 \geq 0$

<u>RADICI</u> $\; t = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 <^{3}_{1}$ $\qquad \begin{matrix} t \geq 3 \\ t \leq 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} e^x \geq 3 \\ e^x \leq 1 \end{matrix}$

$\Rightarrow \underline{x \geq \lg 3 \text{ oppure } x \leq 0}$

Dunque $f(x) \geq 0$ se e solo se $\quad x \leq 0$ o $x \geq \lg 3$

<u>SIMMETRIE</u> $\; f(-x) = \lg(e^{-2x} - 4e^{-x} + 4)$

$f(-x) \neq f(x) \quad f(-x) \neq -f(-x)$ <u>né</u> pari <u>né</u> dispari

<u>PERIODICITÀ</u> $\quad \lg x$ e $e^x$ <u>non</u> sono periodiche, $f(x)$ <u>non</u> è periodica.

4) $f(x) = \arcsin\left(\frac{|x+2|}{x}\right)$

<u>DOMINIO</u> $\quad -1 \leq \frac{|x+2|}{x} \leq 1.$

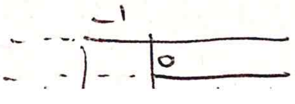
$$\begin{cases} \frac{|x+2|}{x} \leq 1 \\ \frac{|x+2|}{x} \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ \frac{x+2}{x} \leq 1 \\ \frac{x+2}{x} \geq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x+2 < 0 \\ \frac{-x-2}{x} \leq 1 \\ \frac{-x-2}{x} \geq -1 \end{cases}$$

PRIMO SISTEMA

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ \frac{x+2-x}{x} \leq 0 \\ \frac{x+2+x}{x} \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq -2 \\ \frac{2}{x} \leq 0 \\ \frac{2x+2}{x} \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq -2 \\ x < 0 \\ \frac{2(x+1)}{x} \geq 0 \end{cases}$$

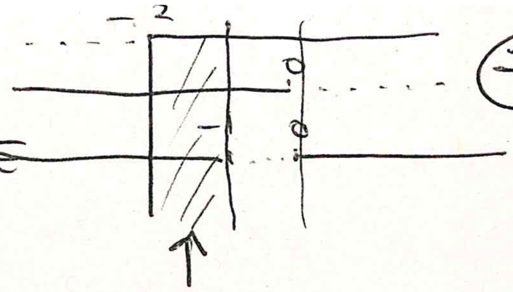
$\frac{2(x+1)}{x} \geq 0 \Rightarrow$ studio dei segni: $\quad \begin{matrix} x \geq -1 \\ x > 0 \end{matrix}$



$\begin{matrix} x \leq -1 \\ x > 0 \end{matrix}$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 0 \\ x > 0 \text{ e } x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema}$$

DEVONO ESSERE VERIFICATE TUTTE E TRE



$\Downarrow$

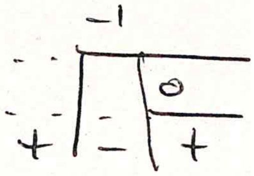
$$\boxed{-2 \leq x \leq -1}$$

SECONDO SISTEMA

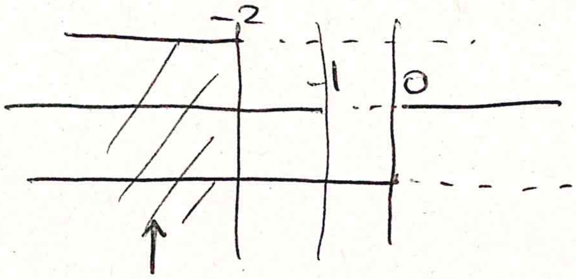
$$\begin{cases} x < -2 \\ \dfrac{-x-2-x}{x} \leq 0 \\ \dfrac{-x-2+x}{x} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2 \\ \dfrac{-2x-2}{x} \leq 0 \\ \dfrac{-2}{x} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2 \\ \dfrac{-2(x+1)}{x} \\ x < 0 \end{cases}$$

$-\dfrac{2(x+1)}{x} \leq 0 \iff \dfrac{2(x+1)}{x} \geq 0$ studio dei segni $x \geq -1$, $x > 0$

$x > 0,\ x \leq -1$



$$\begin{cases} x < -2 \\ x > 0 \quad x \leq -1 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema}$$



$$\boxed{x < -2}$$

Unisco le soluzioni del primo sistema e del secondo

$-2 \leq x \leq -1 \quad \cup \quad x < -2$

$\Rightarrow \quad x \leq -1$

$D = \{x \mid x \leq -1\} = (-\infty, -1]$

SEGNO $\arcsin\left(\dfrac{|x+2|}{x}\right) \geq 0 \iff \dfrac{|x+2|}{x} \geq 0$

$\iff$ dato che $|x+2| \geq 0$ $\quad \underline{x > 0}$ ma ~~x≥0~~ $D = (-\infty, -1]$

$\Rightarrow f(x) \leq 0 \ \forall x \in D$!

$f(x) = 0 \iff x = -2$

SIMMETRIE $f(-x) = \arcsin\left(\dfrac{|-x+2|}{-x}\right)$ NÈ PARI NÈ DISPARI

PERIODICITÀ arcsin x NON è periodica $\rightarrow$ f NON è periodica

5) $f(x) = \dfrac{1}{|x+1|-2}$

<u>DOMINIO</u> $|x+1| \neq 2 \Rightarrow \begin{matrix} x+1 \neq 2 & \Rightarrow & x \neq 1 \\ -x-1 \neq 2 & & x \neq -3 \end{matrix}$

$D = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 1,\ x \neq -3\} = (-\infty,-3) \cup (-3,1) \cup (1,+\infty)$

<u>SEGNO</u> $f(x) > 0 \iff |x+1| > 2$

$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1 > 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x+1 < 0 \\ -x-1 > 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -1 \\ x > 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x < -1 \\ -x > 3 \Rightarrow x < -3 \end{cases}$

$\boxed{x > 1} \cup \boxed{x < -3}$

$f(x) > 0 \iff$ $x > 1$ oppure $x < -3$

<u>SIMMETRIE</u> $f(-x) = \dfrac{1}{|-x+1|-2}$ NE' PARI NE' DISPARI

PERIODICITÀ $f$ <u>non</u> è periodica.

6) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{2}{\tan x}}$

<u>DOMINIO</u>

$\tan x$ è ben definita se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

Inoltre $\tan x \neq 0$ se $x \neq 0 + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$

<u>SEGNO</u> $f(x) \geq 0 \iff \tan x > 0 \iff k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

<u>SIMMETRIE</u> $\tan x = -\tan(-x)$

$f(-x) = \sqrt[3]{\dfrac{2}{-\tan x}} = -\sqrt[3]{\dfrac{2}{\tan x}} = -f(x)$ $f$ è <u>DISPARI</u>

PERIODICITÀ $f$ è PERIODICA DI PERIODO $\pi$ (Come $\tan x$)

7) $f(x) = \dfrac{1}{\cosh(\sin x)}$ (9)

DOMINIO $\cosh x > 0 \ \forall x \Rightarrow$ $D = \mathbb{R}$

SEGNO $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

SIMMETRIE $f(-x) = \dfrac{1}{\cosh(\sin -x)} = \dfrac{1}{\cosh(-\sin x)} = \dfrac{1}{\cosh(\sin x)} = f($

f è PARI

sen x è dispari

cosh x è PARI

PERIODICITÀ $f(x+2\pi) = \dfrac{1}{\cosh(\sin(x+2\pi))} = \dfrac{1}{\cosh(\sin x)} = f(x)$

f è periodica di periodo $2\pi$.

8) $f(x) = \cancel{\ } \arctan\left(\sqrt{4e^{2x} - 9e^x + 2} - 2e^x\right)$

DOMINIO $4e^{2x} - 9e^x + 2 \geq 0$ $t = e^x$

$4t^2 - 9t + 2 \geq 0$ $t = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-32}}{8} = \dfrac{9 \pm 7}{8} \nearrow 2$

$t \geq 2 \Rightarrow e^x \geq 2 \Rightarrow$ ~~$x \geq \lg 2$~~ $x \geq \lg 2$

$t \leq \frac{1}{4} \Rightarrow e^x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow x \leq \lg \frac{1}{4}$

$D = \{ x \mid x \geq \lg 2 \text{ oppure } x \leq \lg \frac{1}{4} \} = (-\infty, \lg \frac{1}{4}] \cup [\lg 2,$

SEGNO $\arctan\left(\sqrt{4e^{2x} - 9e^x + 2} - 2e^x\right) \geq 0$ se e solo se

$\sqrt{4e^{2x} - 9e^x + 2} - 2e^x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{4e^{2x} - 9e^x + 2} \geq 2e^x$

$x \in D$ quindi la radice è ben definita.
Inoltre $2e^x \geq 0 \ \forall x$.
Elevo al quadrato entrambi i termini.

$4e^{2x} - 9e^x + 2 \geq 4e^{2x} \Leftrightarrow -9e^x + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow e^x \leq 2/9 \ \ldots \ x \leq \lg(2/9)$

Dunque $f(x) \geq 0 \iff x \leq \lg\left(\frac{2}{9}\right) \quad x \in D$. (10)

<u>simmetrie</u> $f(-x) = \arctan\left(\sqrt{4e^{-2x} - 9e^{-x} + 2} - 2e^{-x}\right)$

né pari né dispari

<u>Periodicità</u> $\arctan x$ <u>non</u> è periodica

$\Rightarrow f$ non è periodica.

9) $f(x) = \lg(4 \sinh x)$.

<u>DOMINIO</u> $4\sinh x > 0 \Rightarrow \sinh x > 0 \Rightarrow x > 0$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \; x > 0\} = (0, +\infty)$$

<u>SEGNO</u> $\lg(4\sinh x) \geq 0 \iff 4\sinh x \geq 1$

$\Rightarrow \sinh x \geq \frac{1}{4} \qquad x \geq \text{settsenh}\left(\frac{1}{4}\right)$.

<u>SIMMETRIE</u> $f$ non è né pari né dispari

<u>PERIODICITA'</u> $f$ non è periodica, perché $\sinh x$, $\lg x$ non sono periodiche

10) $f(x) = \dfrac{\lg(\sin x)}{\sin x - 1}$

<u>DOMINIO</u> $\sin x > 0 \Rightarrow 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$

$\sin x \neq 1 \Rightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, \; x \neq \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\} =$$

$= (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{2}) \cup \ldots$

segno $\boxed{\dfrac{\lg(\sin x)}{\sin x - 1} \geq 0}$ 

notiamo che $\sin x - 1 < 0 \quad \forall x \Rightarrow$ quindi

$f(x) \geq 0 \iff \lg(\sin x) \leq 0 \iff 0 < \sin x \leq 1$
$\forall x \in D$

Dunque $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D$.

SIMMETRIE $f$ né pari, né dispari

PERIODICITÀ $f(x+2\pi) = \dfrac{\lg(\sin(x+2\pi))}{\sin(x+2\pi)-1} = f(x)$

$f$ è periodica di periodo $2\pi$.

11) $f(x) = 2x - \sqrt{|x^2-4x+3|}$

DOMINIO la radice è sempre ben definita visto che $|x^2-4x+3| \geq 0$.

$D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

SEGNO $2x - \sqrt{|x^2-4x+3|} \geq 0$

$2x \geq \sqrt{|x^2 - 4x + 3|}$

1) se $x<0$ ho che $2x<0$ e $2x \not\geq \sqrt{|x^2-4x+3|}$
quindi la disequazione non è MAI VERIFICATA

2) se $x \geq 0$ elevo al quadrato entrambi i termini

$$4x^2 \geq |x^2-4x+3| \quad \text{con } (x \geq 0).$$

$$\begin{cases} x^2-4x+3 \geq 0 \\ 4x^2 \geq x^2-4x+3 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x^2-4x+3<0 \\ 4x^2 \geq -x^2+4x-3 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

PRIMO SISTEMA

$$\begin{cases} x^2-4x+3 \geq 0 \longrightarrow \\ 4x^2-x^2+4x-3 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$ $\quad x \geq 3$, $x \leq 2$

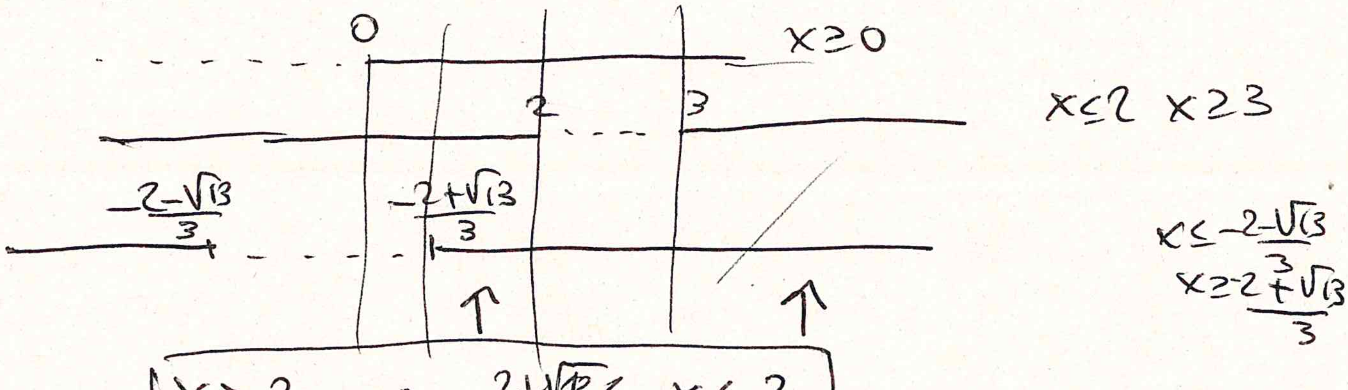
$\searrow 3x^2+4x-3 \geq 0$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+36}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{52}}{6} \begin{matrix} \frac{-2+\sqrt{13}}{3} \\ \frac{-2-\sqrt{13}}{3} \end{matrix}$

$x \geq \frac{-2+\sqrt{13}}{3}$

$x \leq \frac{-2-\sqrt{13}}{3}$

metto a sisteme



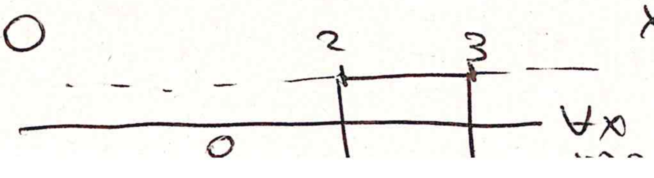

$$\boxed{x \geq 3 \quad e \quad \frac{-2+\sqrt{13}}{3} \leq x \leq 2}$$

SECONDO SISTEMA

$$\begin{cases} x^2-4x+3<0 \rightarrow \quad 2<x<3 \\ 4x^2+x^2-4x+3 \geq 0 \Rightarrow 5x^2-4x+3 \geq 0 \Rightarrow \forall x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-15}}{5} \quad \Delta < 0$

sisteme




$\boxed{2 < x < 3}$

Unisco le soluzioni

$x \geq 3 \cup \frac{-2+\sqrt{13}}{3} \leq x \leq 2 \quad \cup \quad 2 < x < 3$

$$\Rightarrow \boxed{x \geq -\frac{2+\sqrt{13}}{3}}$$

$f(x) \geq 0 \iff x \geq -\frac{2+\sqrt{13}}{3}$

<u>SIMMETRIE</u> f né pari né dispari

PERIODICITÀ f non è periodica.