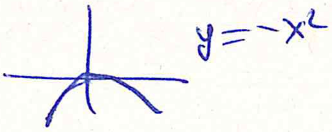
Soluzioni esercizi su massimi e minimi vincolati

1) Il vincolo è $h(x,y)=0$ con $h(x,y)=x^2+y$:
la curva è una parabola



$\downarrow$
è chiusa ma non limitata.

$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=2x \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=1\neq 0 \Rightarrow$ tutti i pti del vincolo sono regolari.

Applico teorema dei moltiplicatori di Lagrange

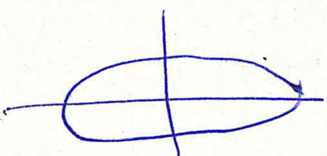
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lambda\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lambda\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) \\ h(x,y)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x+2xe^{x^2+y}=2\lambda x \\ e^{x^2+y}-1=\lambda \\ x^2+y=0 \end{cases}$$

notiamo che $x^2+y=0 \Rightarrow e^{x^2+y}=1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 4x+2x=2\cancel{\lambda x} \\ \lambda=0 \\ x^2+y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ \lambda=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$(0,0)$ è l'unico pto critico.

2) Il vincolo è l'insieme $\{(x,y) \ h(x,y)=0\}$ con $h(x,y)=\frac{x^2}{2}+y^2-1$. La curva è una ellisse



$\Rightarrow$ è CHIUSA e LIMITATA

$f(x,y)=e^{xy}$ è regolare (continua in particolare)
$\Rightarrow$ per teorema di Weierstrass ho massimo e minimo nel vincolo.

$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=x \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=2y \Rightarrow$ annullano l'unico pto in cui si annullano è $(0,0)$ che non sta nell'ellisse

Tutti i pti del vincolo sono regolari.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(xy) = \lambda \frac{\partial h}{\partial x}(xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(xy) = \lambda \frac{\partial h}{\partial y}(xy) \\ h(xy) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y e^{xy} = \lambda x \\ x e^{xy} = 2\lambda y \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$$

se $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ ma $(0,0)$ non risolve la 3ª eq.

$\Rightarrow x \neq 0$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{y}{x} e^{xy} \\ x \cancel{e^{xy}} = 2y \cdot \frac{y}{\cancel{x}} \cancel{e^{xy}} \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = \frac{y}{x} e^{xy} \\ x^2 = 2y^2 \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = \dots \\ x^2 = 1 \\ 2y^2 = 1 \end{cases}$$

le soluzioni sono $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

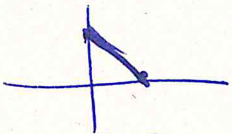
$$f\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = f\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$f\left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = f\left(1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Dunque $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono pti di massimo

$\left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono pti di minimo.

3) Il vincolo è il segmento $x + y = 3$
$x \geq 0 \quad y \geq 0$



è CHIUSO e LIMITATO

$h(xy) = x + y - 3$

$\frac{\partial h}{\partial x} = 1 = \frac{\partial h}{\partial y} \Rightarrow$ tutti i pti sono regolari

f è continua $\Rightarrow$ per teorema di Weierstrass ha massimo e minimo sul vincolo

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(xy) = \lambda \frac{\partial h}{\partial x}(xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(xy) = \lambda \frac{\partial h}{\partial y}(xy) \\ h(xy) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{2}\right) = \lambda \\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right) = \lambda \\ x+y \cancel{+} = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{2}\right) = \lambda \\ \cancel{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{y}{2}\right) = \cancel{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{2}\right) \\ x+y = 3 \end{cases} \begin{cases} \lambda = \cdots \\ x = y \\ 2x = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} \lambda = \cdots \\ y = \frac{3}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{matrix}$$

L'unico pto critico è $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ $\left(\frac{3}{2} > 0\right)$

Gli altri candidati massimi e minimi sono gli estremi del segmento $(0,3)$ e $(3,0)$

$$f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \left(1+\frac{9}{4}\right)^2 = \left(\frac{13}{4}\right)^2 = \frac{169}{16}$$

$$f(0,3) = f(3,0) = 1+\frac{3}{2} = \frac{5}{2} = \frac{40}{16}$$

$\Rightarrow$ $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ è pto di massimo

$(0,3)$ e $(3,0)$ sono pti di minimo

__Es 4__ La distanza tra $(0,0)$ e un pto della retta è $f(x,y) = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$

Devo determinare il minimo di $f(x,y)$ tra gli (x,y) che sono vincolati a stare sulla retta

$3x+2y+4=0 \Rightarrow h(xy) = 0$ è il vincolo

con $h(x,y) = 3x+2y+4$.

$\frac{\partial h}{\partial x} = 3 \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 2 \Rightarrow$ tutti i pti del vincolo sono regolari

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(xy) = \lambda \frac{\partial h}{\partial x}(xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(xy) = \lambda \frac{\partial h}{\partial y}(xy) \\ h(xy) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = 3\lambda \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\lambda \\ 3x+2y+4=0 \end{cases}$$

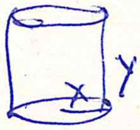
$$\begin{cases} \lambda = \frac{x}{3\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{2}{3}\frac{x}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}} \\ 3x+2y+4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = \dots \\ y = \frac{2}{3}x \\ 3x + \frac{4}{3}x + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = \dots \\ y = \frac{-8}{39} \\ x = \frac{-4}{13} \end{array}$$

$\Rightarrow$ l'unico pto critico è $\left(-\frac{4}{13}, -\frac{8}{39}\right)$.

Notiamo che $\lim_{\substack{|x|\to+\infty \\ (x,y)\in \text{vincolo}}} f(xy) = +\infty = \lim_{\substack{|y|\to+\infty \\ (xy)\in\text{vincolo}}} f(x,y)$

Dunque f ammette minimo sul vincolo $\Rightarrow$ il pto di minimo è $\left(-\frac{4}{13}, -\frac{8}{39}\right)$ e la distanza è il valore minimo cioè $\sqrt{\left(\frac{4}{13}\right)^2+\left(\frac{8}{39}\right)^2}$.

<u>Es 5</u> x = raggio base
y = altezza



Volume $= \pi x^2 y$ area $= \pi x^2 + \pi x^2 + 2\pi x y =$
$= 2\pi x^2 + 2\pi x y$.

Devo determinare il minimo di $f(xy) = 2\pi x^2 + 2\pi x y$ vincolato sull'insieme $\left\{ (xy) \;\; \begin{array}{l} x \geq 0, y \geq 0 \\ \pi x^2 y = 4 \end{array} \right\}$

$\swarrow$

$h(xy) = \pi x^2 y - 4 \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 2\pi x y \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \pi x^2$

si annullano entrambi solo nei pti $(0,y)$ ⑤,
ma $(0,y)$ non appartiene al vincolo.
Tutti i pti del vincolo sono regolari.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(xy) = \lambda \frac{\partial h}{\partial x}(xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(xy) = \lambda \frac{\partial h}{\partial y}(xy) \\ h(xy) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{4}^{2}\cancel{\pi}x + \cancel{2}\cancel{\pi}y = \lambda \cancel{2}\cancel{\pi}xy \\ \cancel{2}\cancel{\pi}x = \lambda \cancel{\pi}x^2 \\ \pi x^2 y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = \lambda xy \\ 2x = \lambda x^2 \\ \pi x^2 y = 4 \end{cases} \Rightarrow x \neq 0$$ (se $x=0$ la 3^a eq. non è soddisfatta)

$$\begin{cases} 2x + y = \frac{2}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}y \\ \lambda = \frac{2}{x} \\ \pi x^2 y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = y \\ \lambda = \frac{2}{x} \\ \pi x^2 \cdot 2x = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \\ \lambda = \dots \\ x = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \end{cases}$$

L'unico pto critico è $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}, 2\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}\right)$.

Notiamo che $\lim\limits_{\substack{|x| \to +\infty \\ (xy) \in \text{vincolo}}} f(xy) = +\infty = \lim\limits_{\substack{|y| \to +\infty \\ (xy) \in \text{vincolo}}} f(xy)$

Dunque f ammette minimo nel vincolo.
Il cilindro con minima area è quello con raggio di base $\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$ e altezza $2\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$.