

PROGRAMMA del corso di Istituzioni di Analisi Matematica

Corsi di laurea in Scienze Statistiche, matricole DISPARI

Annalisa Cesaroni , a.a. 2018-2019

Testo Consigliato:

Analisi Matematica, M. Bertsch, R. Dal Passo & L. Giacomelli, McGraw-Hill Editore.

Esercizi di autoverifica e complementi su piattaforma MOODLE del Dipartimento di Statistica.

1. Elementi di base: insiemi, numeri, funzioni, funzioni elementari.

- Simboli e operazioni sugli insiemi. Simboli logici. Prodotto cartesiano di insiemi.
- Insiemi numerici: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.
- Definizione dei numeri reali con gli allineamenti decimali. Proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.
- Maggioranti e minoranti di un insieme, massimo e minimo, estremo superiore e inferiore di insiemi di numeri reali. Proprietà di completezza di $\mathbb{R}$.
- Sommatorie e loro proprietà.
- Definizione di fattoriale e di coefficienti binomiali. Formula del binomio di Newton.
- Funzioni: definizione di funzione, dominio, immagine, grafico.
- Funzioni limitate superiormente, inferiormente, limitate.
- Funzioni iniettive, composizione di funzioni, funzione inversa, funzione monotona, strettamente monotona crescente e decrescente.
- Una funzione strettamente monotona è invertibile (con dim.).
- Funzioni simmetriche pari e dispari, funzioni periodiche.
- Potenze ad esponente naturale, radici n-esime in $\mathbb{R}$. Potenze ad esponente intero, razionale, reale e loro grafici.
- Funzioni esponenziali e logaritmi.
- Funzioni trigonometriche, trigonometriche inverse e loro proprietà.
- Funzioni iperboliche.

2. Limiti per funzioni di una variabile.

- Interni: definizione di distanza euclidea, intorno di x_0 reale come intervallo. Intervalli aperti e chiusi.
- Definizione di punto di accumulazione. -Definizione di intorno di $\pm\infty$.
- Limite: definizione di limite (sia per x_0 ed l reali che infiniti ($\forall \varepsilon \exists \delta \dots$, ecc..)).
- Teorema di unicità del limite.
- Teorema di permanenza del segno, Teorema del confronto (dei "Carabinieri").
- Definizione di limite destro e sinistro.
- Operazioni sui limiti: limite di somme, prodotti, rapporti, ecc.. per funzioni con limite finito.
- Limite del prodotto di una funzione infinitesima per una localmente limitata.
- Aritmetizzazione parziale dei limiti: limite di somma, prodotto, reciproco e rapporto quando una delle funzioni è infinita. Forme indeterminate.
- Limiti delle funzioni elementari.
- Teorema sul limite di funzione composta. Applicazione al cambio di variabile nei limiti.
- Primi limiti notevoli: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (con dim.) e derivati ($\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$).
- Scala di funzioni infinite a $+\infty$: $\log_a x$, x^α , a^x .
- Infinitesimi, infiniti e confronti: definizione di infinito e di infinitesimo di ordine superiore (inferiore) e dello stesso ordine per $x \rightarrow x_0$. Funzioni asintotiche per $x \rightarrow x_0$.
- Definizione di o piccolo (simboli di Landau) per funzioni infinitesime. Proprietà degli o piccoli.
- Asintoti orizzontale, verticale e obliquo di una funzione f .

3. Limiti di successioni.

- Successioni a valori in $\mathbf{R}$: definizione di limite di successione.
- Successioni convergente, divergente e irregolare.
- Scala di successioni infinite: $\log n$, n^α , a^n , $n!$, n^n . - Limite della successione geometrica r^n .

- Criterio del rapporto per i limiti di successioni.
- Esistenza del limite di successioni monotone e sue applicazioni.
- Definizione di e come limite di successione.
- Ulteriori limiti di funzioni notevoli (derivati dalla definizione di e): $\frac{e^x-1}{x}$, $\frac{\log(x+1)}{x}$, $\frac{a^x-1}{x}$ (con dim.).

4. Funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

- Definizione di funzione continua e di continuità da destra e da sinistra.
- Punti di discontinuità: eliminabile, di salto e di 2a specie, funzioni estendibili per continuità. Punti di discontinuità per le funzioni monotone.
- Continuità delle funzioni elementari.
- Teorema degli zeri delle funzioni continue.
- Teorema dei valori intermedi.
- Funzioni limitate, punti di massimo e minimo locale e assoluto.
- Massimi e minimi delle funzioni continue su chiusi e limitati: teorema di Weierstrass.

5. Derivate e calcolo differenziale.

- Definizione di derivata di funzione reale.
- Interpretazione geometrica della derivata, retta tangente al grafico.
- Scrittura equivalente della derivabilità di f con o -piccolo.
- Derivata sinistra e destra, punti angolosi, cuspidi, punti a tangente verticale.
- Teorema: se f derivabile in x_0 è continua in x_0 (con dim.). Il viceversa non è vero: esempio, $f(x) = |x|$ in $x = 0$.
- Derivate delle funzioni elementari (dim. per x^n , $\sin x$, e^x , $\log x$).
- Regole di derivazione: somma, prodotto e quoziente.
- Derivata di funzioni composte. - Derivata della funzione inversa. Derivata di $\arcsin x$, $\arctan x$ come funzioni inverse (con dim.).
- Calcolo delle derivate.
- Teorema di Fermat (con dim.).
- Teorema di Lagrange o del valor medio (senza dim.).
- Monotonia e derivata: Criterio di monotonia per funzioni derivabili (con dim.).
- Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo.
- Teorema di de l' Hôpital (senza dim.).
- Teorema sul limite di f' per calcolare la f' in un punto.
- Derivate successive: definizione di derivata n -esima. Definizione di funzioni regolari.
- Calcolo delle derivate successive di e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$.
- Funzioni convesse e concave: definizione.
- Criterio di convessità per funzioni due volte derivabili.
- Studio del grafico di una funzione.
- Polinomio di Taylor: definizione.
- Teorema di Taylor (senza dim.). - Polinomi di Taylor (detti anche Mac Laurin) delle funzioni elementari (dim. per e^x , $\sin x$).
- Limiti con i polinomi di Taylor.

6. Serie numeriche

- Successione delle somme parziali, somma di una serie. Serie numeriche convergenti, divergenti e irregolari.
- Condizione necessaria per la convergenza (con dim.). Il viceversa non è vero: la serie armonica diverge (con dim.).
- Serie a termini positivi. Una serie a termini positivi non può mai essere irregolare (con dim.).
- La serie geometrica di ragione r (dim. del suo comportamento).
- La serie armonica generalizzata $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$.
- Criteri di convergenza per serie a termini non negativi: criterio del rapporto, criterio della radice, criterio del confronto, criterio del confronto asintotico.
- Definizione di convergenza assoluta per serie con termini di segno qualsiasi. Relazione con la convergenza.
- Serie con termini di segno alterno: criterio di convergenza di Leibniz.

7. Calcolo integrale e integrali in senso generalizzato.

- Somme inferiori e somme superiori relative a una partizione di un intervallo per una funzione limitata.
- Definizione di funzione integrabile secondo Riemann, definizione di integrale di Riemann. Significato geometrico dell' integrale. Esempio di funzione limitata ma non integrabile
- Proprietà dell'integrale: linearità, confronto, additività rispetto all' intervallo di integrazione.
- Teorema della media integrale per funzioni continue (con dim.).
- Integrabilità delle funzioni continue, delle funzioni monotone (senza dim.).
- Definizione di funzione integrale e teorema fondamentale del calcolo integrale (con dim.).
- Definizione di primitiva di una funzione.
- Se F è una primitiva di f allora anche $F + k$ (k costante) è una primitiva di f (con dim.). Se F_1 e F_2 sono due primitive di f allora $F_1 = F_2 + k$ (k costante) (con dim.).
- Corollario del teorema fondamentale del calcolo integrale (con dim.): calcolo di integrali definiti mediante primitive.
- Integrazione per parti e per sostituzione.
- Integrazione di alcune funzioni razionali.
- Sostituzioni notevoli per l'integrazione di alcune funzioni irrazionali ($\sqrt{1-x^2}$).
- Integrali generalizzati di funzioni continue illimitate su intervalli limitati. Integrali generalizzati di funzioni continue su intervalli illimitati.
- Criteri del confronto asintotico per funzioni non negative.
- Convergenza di $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ e di $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$, al variare di $\alpha > 0$.
- Convergenza di $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}$ al variare di α e β .

8. Funzioni di più variabili reali.

- Definizione di $\mathbb{R}^2$, definizione di prodotto scalare e di distanza.
- Definizione di intorno sferico (palla) di un punto $x \in \mathbb{R}^2$.
- Concetti base di topologia in $\mathbb{R}^2$: frontiera di un insieme, insiemi chiusi, insiemi limitati.
- Definizione di funzione di 2 variabili reali a valori reali, dominio.
- Definizione di limite per funzioni di due variabili a valori reali, definizione di funzione continua in un punto (x_0, y_0) .
- Derivate parziali di una funzione e derivate direzionali.
- Definizione di funzione differenziabile per una funzione in due variabili. Equazione del piano tangente al grafico.
- Teorema: se una funzione è differenziabile in un punto allora è continua in quel punto (con dim.).
- Formula del gradiente per le derivate direzionali di una funzione differenziabile.
- Teorema del differenziale totale.
- Derivate seconde di una funzione in due variabili e matrice Hessiana.
- Punti critici di una funzione in più variabili.
- Teorema di Fermat: se f è differenziabile in un punto di massimo o minimo locale, allora il punto è un punto critico.
- Criterio dell'Hessiana per stabilire la natura dei punti critici per funzioni in due variabili.
- Curve nel piano, e punti regolari.
- Estremi vincolati: definizione di punto di massimo o minimo vincolato.
- Teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

N.B. I teoremi da sapere con dimostrazione sono solo quelli in cui viene specificato "(con dim.)". Per gli altri teoremi, lo studente deve essere in grado di esporre rigorosamente l'enunciato, spiegare il significato e le applicazioni del risultato. Lo studente deve inoltre saper enunciare tutte le definizioni in modo rigoroso. Gli esempi inclusi nel testo non fanno parte del programma di teoria, ma se ne consiglia vivamente la lettura per una migliore comprensione degli argomenti svolti.