

Modello probabilistico : - Un insieme Ω che contiene tutti gli enti possibili
- Probabilità: grado di fiducia assegnato agli eventi, cioè ai sottoinsiemi di Ω

La Probab. $A \mapsto P(A)$ deve soddisfare le condizioni di coerenza

$$1) P(\Omega) = 1 \quad 2) \text{ Se } A \cap B = \emptyset \text{ allora } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Dimostrazione. Siano A, B, C tre eventi, "a due a due" disgiunti, cioè $A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset, B \cap C = \emptyset$

$$P(A \cup B \cup C) = \underbrace{P(A \cup B \cup C)}_{\text{disgiunti}} \stackrel{\text{upla 2)}}{=} P(A \cup B) + P(C) \stackrel{\text{upla 2)}}{=} P(A) + P(B) + P(C)$$

In generale, se $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono eventi a due a due disgiunti allora

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \\ = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Noi assumiamo una proprietà più forte:

Se $(A_n)_{n \geq 1} = (A_1, A_2, \dots, A_n, \dots)$ è una successione di eventi
a due a due disgiunti, cioè $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$
allora

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$$

Definizione Sia Ω un insieme e denotiamo con $\mathcal{P}(\Omega)$ (parti di Ω) la famiglia dei suoi sottoinsiemi (eventi)
Una probabilità è una funzione $P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ tale che:

1) $P(\Omega) = 1$

2) Per ogni collezione $(A_n)_{n \geq 1}$ di eventi a due disgiunti,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) \quad (\text{additività numerabile})$$

In particolare, se $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono eventi disgiunti

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n) \quad (\text{additività finita})$$

Proprietà fondamentali

Sia P una probabilità sugli eventi di Ω

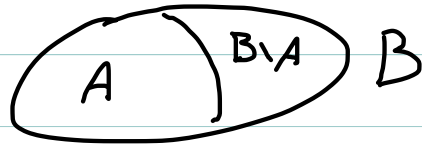
Se $A, B \subseteq \Omega$, definiamo $B \setminus A = \{w \in B : w \notin A\} = B \cap A^c$

In particolare: $\Omega \setminus A = A^c$

Regola 1 Se $A \subseteq B$ allora $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

In particolare: $P(A^c) = 1 - P(A)$ ($\Rightarrow P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$)

Dimostrazione

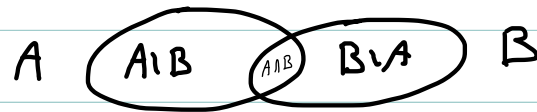


A e $B \setminus A$ sono disgiunti, e la loro unione è B

$$P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$$

Regola 2. Siano A e B due eventi. Allora

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

$$B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(\underbrace{(A \setminus (A \cap B)) \cup A \cap B \cup (B \setminus (A \cap B))}_{\text{disgiunti}})$$

$$= P(A \setminus (A \cap B)) + P(A \cap B) + P(B \setminus (A \cap B)) = \text{regola 1}$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Esempio Probabilità a enti equiprobabili.

Sia Ω un insieme con un numero finito di elementi.

Indichiamo con $|\Omega|$ tale numero.

Supponiamo che P sia una probabilità per cui $P(\{w\}) = p$ è la stessa per tutti gli $w \in \Omega$.

Sia $A \subseteq \Omega$ $A = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ $n = |A|$

$$A = \{w_1\} \cup \{w_2\} \cup \dots \cup \{w_n\} \Rightarrow P(A) = P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) + \dots + P(\{w_n\}) = np$$

dove $p = P(\{w\}) \forall w \in \Omega$.

$$\text{Se prendiamo } A = \Omega : 1 = |\Omega|p \Rightarrow p = \frac{1}{|\Omega|}$$

$$\text{In generale : } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Esempio Ci sono due urne: l'urna X contiene 10 palline numerate da 1 a 10, e l'urna Y 5 palline numerate da 1 a 5. L'esperimento consiste nell'estrazione una pallina da ciascuna urna.

$$\Omega = \{(i, j) : i \in \{1, \dots, 10\}, j \in \{1, \dots, 5\}\} = \{1, \dots, 10\} \times \{1, \dots, 5\}$$

$$|\Omega| = 10 \cdot 5 = 50$$

Principio fondamentale del calcolo combinatorio

Supponiamo che gli elementi di un insieme Ω siano determinati da una sequenza di K scelte successive in modo tale che

- Per la prima scelta ho n_1 possibilità
- Qualunque sia la prima scelta ho n_2 possibilità per la seconda
..... qualunque siano le prime $K-1$ scelte, ho n_K possibilità per la K -esima scelta.
- e sequenze distinte di scelte corrispondono elementi distinti di Ω

$$\text{Allora } |\Omega| = n_1 \cdot n_2 \cdots n_K$$