

Nozioni di base di calcolo combinatorio

- Disposizioni con ripetizione: k celle da riempire con oggetti tratti dall'insieme (finito) A

Una disposizione è una sequenza ordinata $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ di elementi di A , cioè un elemento di

$$\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ volte}} = A^k. \quad \text{Si ha che } |A^k| = |A|^k$$

- Disposizioni senza ripetizione: si tratta di sequenze

$(i_1, i_2, \dots, i_k)$ con $i_j \in A$, in cui le componenti delle sequenze sono distinte, cioè $i_j \neq i_h$ se $j \neq h$

Sia Ω l'insieme di tali disposizioni senza ripetizione, e sia $n = |A|$. Allora

$$|\Omega| = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

In particolare, se $k=n$, le disposizioni senza ripetizione si dicono permutazioni e il numero di permutazioni di n oggetti è $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

- Combinazioni di k elementi estratti da un insieme A di n elementi

$$\Omega = \{ B \subseteq A : |B| = k \}$$

Poiché ad una combinazione "corrispondono" $k!$ disposizioni una ripetizione distinte, allora

$$|\Omega| = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{n}{k} \quad \begin{array}{l} \text{coefficiente} \\ \text{binomiale} \end{array}$$

Esercizio Estraiamo 5 carte da un mazzo di 52 carte da Poker.

- 1) Qual è la probabilità che tra le 5 carte ci sia almeno un asso?
- 2) Qual è la probabilità che la 3^a delle 5 carte estratte sia un asso?

1) Ω = insieme delle combinazioni di 5 carte

$$|\Omega| = \binom{52}{5}$$

Sia $A =$ "tra le 5 carte c'è almeno un asso"

$A^c =$ "tra le 5 carte non c'è alcun asso"

$$|A^c| = \binom{48}{5} \Rightarrow P(A^c) = \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}$$

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

2) In questo caso conta l'ordine di estrazione. Pertanto

Ω = insieme delle disposizioni senza ripetizione di 5 carte scelte tra le 52

$$|\Omega| = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$$

B = "la Terza carta è un asso". Per contare gli elementi di B possiamo usare il seguente schema di scelte successive:

I: Sulgo B 3^a carta: 4 possibilidades

II. Sulgo B 1^a carta: 51 "

III. " 2^a : 50 "

IV. " 4^a : 49 "

V. " 5^a : 48 "

$$\Rightarrow |B| = 4 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \Rightarrow P(B) = \frac{|B|}{|R|} = \frac{4 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Esempio Ho in mano un mazzo di n chiavi, di cui solo una apre la porta di casa. Provo le chiavi a caso, ma posso riprovare due volte la stessa chiave. Qual è la probabilità di aprire la porta al k -esimo tentativo, con $1 \leq k \leq n$

Sia Ω l'insieme di tutti i modi di ordinare le n chiavi
 $|\Omega| = n!$

$A = \{ \text{la chiave giusta è la } K\text{-esima} \}$

Ogni elemento di A corrisponde ad una disposizione senza r.p. delle $n-1$ chiavi (tolta quella giusta) nelle $n-1$ celle (tolta la K -esima)

$$\Rightarrow |A| = (n-1)!$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Esercizio Un'urna contiene 10 palline rosse e 5 verdi.
Estraggo 6 palline. Qual è la prob. che 4 di esse
siano rosse?

Ω = insieme delle scelte di 6 palline distinte

$$|\Omega| = \binom{15}{6}$$

A = "4 palline sono rosse e due verdi"