

Esercizio Un'urna contiene 10 palline rosse e 5 verdi.
Estraggo 6 palline. Qual è la prob. che 4 di esse
siano rosse?

Ω = insieme delle scelte di 6 palline distinte

$$|\Omega| = \binom{15}{6}$$

A = "4 palline sono rosse e due verdi"

Ogni elemento di A è identificato dalle seguenti due scelte:

- 1) Scelgo 4 palline rosse fra le 10 disponibili: $\binom{10}{4}$ possibilità
- 2) Scelgo due palline verdi fra le 5 disponibili: $\binom{5}{2}$ possibilità

Per il principio fondamentale del calcolo combinatorio:

$$|A| = \binom{10}{4} \binom{5}{2} \Rightarrow P(A) = \frac{\binom{10}{4} \binom{5}{2}}{\binom{15}{6}}$$

Esercizio Ho 6 libri, di cui 3 romanzi, due libri di matematica e uno di chimica, da riporre in uno scaffale. Riprendoli a caso,

qual è la probabilità che

a) i 3 romanzi occupino posizioni adiacenti

b) " " " " " " e anche
i due libri di matematica occupino posizioni adiacenti?

Ω = insieme dei modi di mettere in ordine i 6 libri, cioè
l'insieme delle permutazioni dei 6 libri

$$|\Omega| = 6!$$

a) $A = \text{"i tu romanzi occupano posizioni adiacenti"}$

||||| (adiacenti)

- Scegliamo la tua "casella" in cui inserire i tu romanzi: 4 possibilità
- Sistemo i tu romanzi nelle 3 caselle scelte: $3! = 6$ possibilità
- Sistemo i libri rimanenti nelle 3 caselle rimanenti: $3! = 6$ possibilità

$$|A| = 4 \cdot 6 \cdot 6 = 144 \Rightarrow P(A) = \frac{144}{6!}$$

b) B = "i tre romanzi sono vicini e i due libri di Mat. sono vicini"

| R | R | R | M | M |

| | R | R | R | M | M |

Non è possibile usare direttamente il princ. fond. in quanto il n° di modi di scegliere le due celle per i libri di matematica dipende dalle celle scelte per i romanzi

- supponiamo di scegliere, per i romanzi, le celle 1,2,3. Finito questo, abbiamo

- $3!$ modi di disporre i romanzi
- 2 modi di scegliere celle adiacenti per i libri di Mat.
- 2 modi di disporre i libri di Mat.
- 1 modo per disporre il libro di chimica.

Pertanto, vi sono $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ elementi di B per cui i romanzi stanno nelle celle 1,2,3

- analogamente, vi sono 24 elementi di B con i romanzi nelle celle 4,5,6

- scegliamo le caselle 2,3,4 per i romanzi. Il numero di elementi di B con questo vincolo è

$$3! \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{caselle per } M}}{1} \cdot 2 \cdot 1 = 12$$

- analogamente se le tre caselle scelte sono 3,4,5

$$|B| = 24 + 24 + 12 + 12 = 72 \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{72}{6!}$$

Interpretazione frequentista della probabilità.

Supponiamo di considerare un esperimento aleatorio ripetibile e supponiamo di ripetere N volte, $N \gg 1$.

Sia Ω l'insieme degli esiti possibili dell'esperimento, e $A \subseteq \Omega$. Denotiamo con $n_N(A)$ il numero di volte in cui A si verifica nelle N ripetizioni.

$$\text{allora } P(A) \approx \frac{n_N(A)}{N}$$

PROBABILITA' CONDIZIONALE O CONDIZIONATA

Esempio Un urna contiene n palline, di cui una rossa e le altre nere. Effettuiamo due estrazioni senza rimmissione

- Qual è la probabilità di estrarre la pallina rossa alla seconda estrazione?
- Qual è la probab. di estrarre la pallina rossa alla 2ª estr. sapendo di non averla estratta alla prima?

Per stimare la prima probabilità, ripeto l'esperimento N volte, e detto $A = \text{"estraggo la pallina rossa alla seconda estrazione"}$

$$P(A) \approx \frac{n_N(A)}{N}$$

Un modo ragionevole per stimare la seconda "probabilità" è: ripeto l'esperimento N volte, considero solo gli esperimenti in cui l'evento $B = \text{"non estraggo la pallina rossa alla 1ª estr."}$ si verifica. All'interno di questi esperimenti, A si verifica $n_N(A \cap B)$ volte. La "probab." richiesta la stimiamo con

$$n_N(A \cap B) / n_N(B)$$

$$M_e \quad \frac{n_{N|A \cap B}}{n_{N|B}} = \frac{n_{N|A \cap B}}{N} \bigg/ \frac{n_{N|B}}{N} \approx \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definizione Dati due eventi A e B tali che

$P(B) > 0$, si dice probabilità di A condizionata a B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$