

Definizione A, B eventi con $P(B) > 0$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Terminiamo all'esempio di un urna con n palline di cui 1 rossa e le altre nere. Effettuiamo due estrazioni successive senza rimmissione.

A = "nella seconda estrazione estraggo la pallina rossa"
 B = "nella prima estrazione estraggo una pallina nera"

Ω = insieme delle disposizioni senza ripetizione di due palline
fra quelle dell'urna

$$|\Omega| = n(n-1)$$

$$|A| = n-1 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{n}$$

$$|B| = (n-1)^2 \Rightarrow P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)^2}{n(n-1)} = \frac{n-1}{n}$$

$$A \cap B = A \text{ in quanto } A \subseteq B$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n-1}$$

Supponiamo ora di fare n estrazioni senza reimmissione
Sia, $A_k =$ "la pallina rossa è estratta alla k -esima estrazione"

$B_k =$ "alle k -esime estrazioni ho estratto una pallina rossa"

$$A_k \subseteq B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1}$$

$$\Rightarrow A_k = A_k \cap B_{k-1} \cap B_{k-2} \cap \dots \cap B_1 \quad \text{Notare che } P(A \cap B) = P(B) P(A|B)$$

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(A_k \cap (B_{k-1} \cap \dots \cap B_1)) = P(A_k | B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}) P(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}) \\ &= \frac{1}{n-k+1} P(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}) \end{aligned}$$

$$P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1}) = P(B_{k-1} \cap (B_1 \cap \dots \cap B_{k-2})) =$$

$$= P(B_{k-1} | B_1 \cap \dots \cap B_{k-2}) \cdot P(B_1 \cap \dots \cap B_{k-2})$$

$$= \frac{n-k+1}{n-k+2} P(B_1 \cap \dots \cap B_{k-2})$$

$$= \dots = \frac{n-k+1}{\cancel{n-k+2}} \cdot \frac{\cancel{n-k+2}}{\cancel{n-k+3}} \dots \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \frac{\cancel{n-1}}{n} = \frac{n-k+1}{n}$$

$$\Rightarrow P(A_k) = \frac{1}{n-k+1} \cdot \frac{n-k+1}{n} = \frac{1}{n}$$

Proprietà delle probabilità condizionate

Formule del prodotto : $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$

Formule di Bayes : se $P(A) > 0$ $P(B) > 0$

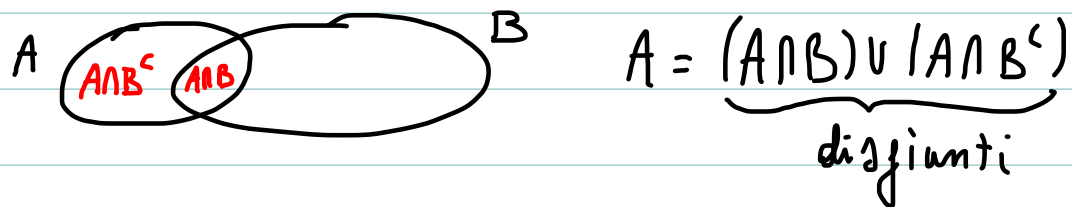
allora $P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$

Dimostrazione : $\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A)$

Formule della somma o delle probabilità totali

Se A e B sono due eventi, $0 < P(B) < 1$ allora

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$



$$\Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = (\text{per la regola del prodotto})$$

$$= P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

Esempio In un processo penale il giudice è convinto al 60% della colpevolezza dell'imputato. Emerge una nuova evidenza: secondo un testimone attendibile il colpevole ha una determinata caratteristica, posseduta dall'imputato e dal 20% della popolazione. Come cambia l'opinione del giudice?

A = "l'imputato è colpevole"

B = "l'imputato possiede la caratteristica osservata dal testimone"

$$P(A) = 0.6$$

$$P(B|A) = 1$$

$$P(B|A^c) = 0.2$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$
$$= \frac{1 \cdot 0.6}{0.68} = 0.88$$

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$$
$$= 1 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.4 = 0.68$$

Inizio Una coppia ha due figli. Assumiamo che ciascuno possa essere maschio o femmina con uguale probabilità.

1) Se il primogenito è maschio, qual è la probab. che siano entrambi maschi?

2) Se almeno uno dei due figli è maschio, qual è la probab. che siano maschi entrambi?

$\Omega = \{(m, m), (m, f), (f, m), (f, f)\}$ Esiti equiprobabili

$$1) A = \text{"entrambi sono maschi"} = \{(m, m)\}$$

$$B = \text{"il primogenito è maschio"} = \{(m, m), (m, f)\}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$2) C = \text{"almeno uno dei due figli è maschio"} = \{(m, m), (m, f), (f, m)\}$$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$