

ESERCIZI - FASCICOLO 1

Esercizio 1. Siano $A, B \subseteq \Omega$ eventi.

(1) Si mostri che se $P(A) = P(B) = 0$ allora $P(A \cup B) = 0$.

(2) Si mostri che se $P(A) = P(B) = 1$ allora $P(A \cap B) = 1$.

Soluzione 1. (1)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B) = 0.$$

(2) Per il punto precedente, $P(A^c \cup B^c) = 0$. Ma, essendo $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, si ha

$$P(A \cap B) = 1 - P(A^c \cup B^c) = 1.$$

Esercizio 2. Sia $C \subseteq \Omega$ un evento.

(i) Si mostri che, se $P(C) = 1$, allora $P(A \cap C) = P(A)$ per ogni $A \subseteq \Omega$.

(ii) Si mostri che, se $P(C) = 0$, allora $P(A \cup C) = P(A)$ per ogni $A \subseteq \Omega$.

Soluzione 2. (1) Basta osservare che

$$P(A) - P(A \cap C) = P(A \cap C^c) = 0$$

essendo $A \cap C^c \subseteq C^c$ e $P(C^c) = 0$.

(2) In modo analogo,

$$P(A \cup C) - P(A) = P(C \cap A^c) = 0$$

essendo $C \cap A^c \subseteq C$ e $P(C) = 0$.

NOTA. In questi esercizi il termine “probabilità uniforme” indica una probabilità a esiti equiprobabili.

Esercizio 3. Siano Ω_1 e Ω_2 due insiemi finiti, sia P_1 la probabilità uniforme su Ω_1 e P la probabilità uniforme su $\Omega_1 \times \Omega_2$. Si mostri che per ogni $A \subset \Omega_1$

$$P_1(A) = P(A \times \Omega_2).$$

Soluzione 3. La conclusione è ovvia una volta osservato che

$$|A \times \Omega_2| = |A| |\Omega_2|.$$

Esercizio 4. Vengono lanciati due dadi regolari a 6 facce.

(a) Calcolare la probabilità che la somma dei valori ottenuti sia 9?

(b) Calcolare la probabilità che la somma dei valori ottenuti sia maggiore di 9?

(c) Calcolare la probabilità che almeno uno dei due dadi abbia dato un risultato maggiore di 4?

(d) Calcolare la probabilità che la somma dei risultati dei due dadi sia maggiore di 9 sapendo che c'è almeno un dado con risultato maggiore di 4.

Soluzione 4. Ci sono 6 esiti possibili per il primo dado e 6 esiti possibili per il secondo dado. Quindi per il principio fondamentale del calcolo combinatorio per la coppia di risultati dei due dadi ci sono $6 \cdot 6 = 36$ esiti possibili. Infine l'ipotesi "dadi regolari" ci assicura che tutti e 36 gli esiti sono equiprobabili.

Se consideriamo le somme abbiamo il seguente schema:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Per rispondere alle domande (a), (b), (c) e (d) è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

(a) Evidenziando in rosso i casi favorevoli si ricava:

$$P(\text{somma dei dadi uguale a } 9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(b)

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$$P(\text{somma dei dadi maggiore di } 9) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(c)

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$$P(\text{Almeno uno dei due dadi è maggiore di } 4) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

(d)

				6	7
				7	8
				8	9
				9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$$P(\text{Somma dei dadi maggiore di 9} | \text{Almeno uno dei due dadi è maggiore di 4}) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Esercizio 5. Da un mazzo di 52 carte vengono estratte 3 carte. Qual è la probabilità che vi sia almeno una carta inferiore (strettamente) a 3?

Soluzione 5. Sia Ω l'insieme dei sottoinsiemi di tre elementi delle 52 carte. Sappiamo che $|\Omega| = \binom{52}{3}$. Sia poi A l'evento corrispondente all'affermazione "almeno una carta è inferiore (strettamente) a 3". Conviene considerare $A^c =$ "tutte le carte sono maggiori o uguali a tre". Poiché le carte maggiori o uguali a tre sono 44, si ha $|A^c| = \binom{44}{3}$, da cui

$$P(A^c) = \frac{\binom{44}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{44 \cdot 43 \cdot 42}{52 \cdot 51 \cdot 50},$$

da cui

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{44 \cdot 43 \cdot 42}{52 \cdot 51 \cdot 50}.$$

Esercizio 6. Un'urna contiene n palline numerate da 1 a n . Estraggo una pallina, la metto da parte, e poi ne estraggo una seconda. Qual è la probabilità che la prima pallina estratta sia la numero 1 e la seconda la numero 2?

Soluzione 6. Come spazio campionario prendiamo $\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j\}$, cioè l'insieme delle coppie ordinate di palline distinte. Se P è la probabilità uniforme su Ω , dobbiamo calcolare $P(\{(1, 2)\}) = \frac{1}{|\Omega|}$. Ω è l'insieme delle disposizioni semplici di n oggetti in due caselle, e quindi $|\Omega| = n(n-1)$. Pertanto

$$P(\{(1, 2)\}) = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Esercizio 7. Da un mazzo di 52 carte da Poker si estraggono, a caso, tre carte. Si calcoli la probabilità che:

- (i) tra le carte estratte vi sia almeno un asso;
- (ii) le tre carte estratte siano di tre semi diversi;
- (iii) almeno due delle carte estratte abbiano lo stesso numero o figura.

Soluzione 7. (i) Ω è l'insieme dei sottoinsiemi di tre elementi del mazzo di 52 carte, quindi $|\Omega| = \binom{52}{3}$. Il numero di modi di scegliere 3 carte in modo che non vi sia alcun asso è $\binom{48}{3}$. Quindi, la probabilità richiesta è

$$1 - \frac{\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}}.$$

- (ii) Sia A l'evento di cui dobbiamo calcolare la probabilità. Scegliere un elemento di A significa innanzitutto scegliere 3 dei 4 semi disponibili ($\binom{4}{3}$ esiti); una volta scelti i semi, ognuna delle 3 carte può essere scelta in 13 modi possibili. Dunque, per il principio fondamentale del calcolo combinatorio,

$$|A| = \binom{4}{3} 13^3$$

che, divisa per $|\Omega| = \binom{52}{3}$, dà la probabilità richiesta.

- (iii) Se B è l'evento di cui dobbiamo calcolare la probabilità, B^c = “le tre carte scelte hanno numero diverso”. Scegliere un elemento di B^c significa scegliere innanzitutto tre tipi (numero o figura) tra i 13 disponibili ($\binom{13}{3}$ scelte); fissati i tre tipi, ogni carta può essere scelta in 4 modi diversi. Dunque

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{\binom{13}{3} 4^3}{\binom{52}{3}}.$$

Esercizio 8. Un mazzo di 52 carte da Poker viene diviso a metà. Si determini la probabilità che ognuna delle due parti contenga carte rosse e nere in egual numero.

Soluzione 8. Ci sono $\binom{52}{26}$ modi di scegliere 26 carte tra 52, quindi $\binom{52}{26}$ modi di dividere il mazzo (*casi possibili*). Dato che ci sono esattamente 26 carte rosse tra le 52 carte, se ognuna delle due parti del mazzo deve contenere carte rosse e nere in egual numero, ognuna dovrà contenere 13 carte rosse. Scelgo quindi le 13 carte rosse di una parte in $\binom{26}{13}$ modi e le rimanenti 13 carte tra le 26 nere in $\binom{26}{13}$ modi. In definitiva:

$$P(\text{ciascuna parte contiene carte rosse in egual numero}) = \frac{\binom{26}{13} \binom{26}{13}}{\binom{52}{26}} \simeq 0.218.$$

Esercizio 9. Una lotteria emette n biglietti, di cui $m < n$ sono vincenti. Qual è la probabilità che un possessore di r biglietti ne abbia almeno uno di vincente?

Soluzione 9. Possiamo scegliere Ω = insieme dei sottoinsiemi di r elementi dell'insieme degli n biglietti, munito della probabilità uniforme. Se A è l'evento in questione, A^c è l'insieme dei sottoinsiemi di r elementi degli $n - m$ biglietti non vincenti. Allora

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\binom{n-m}{r}}{\binom{n}{r}}.$$

Esercizio 10. Si consideri un mazzo di 52 carte da Poker, e si scelgano a caso 5 carte. Si calcoli la probabilità che:

- (i) nelle 5 carte ci sia *almeno* una coppia (cioè due carte di semi diversi ma con lo stesso numero o figura);

- (ii) nelle 5 carte ci sia *esattamente* una coppia, cioè ci sia una coppia ma nessuna combinazione migliore (doppia coppia, tris....)

Soluzione 10. Sia S l'insieme delle 52 carte, $\Omega := \{A \subseteq S : |A| = 5\}$, P la probabilità uniforme su Ω .

- (i) Sia $E =$ “nelle cinque carte estratte non c'è nessuna coppia”. La scelta di un elemento di E^c può essere eseguita in due passi:

- (1) Si scelgono 5 *tipi* (ossia numeri o figure) *distinti*; questo può essere fatto in $\binom{13}{5}$ modi diversi.
- (2) Una volta eseguita la scelta in (??), si tratta di scegliere per ognuno dei 5 numeri o figure uno dei 4 possibili semi (cuori ♡, quadri ◇, fiori ♣, picche ♠); questo comporta 4^5 esiti distinti della scelta.

Segue dunque che $|E^c| = 4^5 \binom{13}{5}$. Pertanto, per il principio fondamentale del calcolo combinatorio,

$$P(E) = 1 - \frac{4^5 \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} \simeq 0.493.$$

- (iii) Sia F l'evento “nelle cinque carte estratte c'è esattamente una coppia”. La scelta di un elemento di F si può eseguire in tre passi:

- (1) si sceglie il numero o figura per la coppia (13 esiti);
- (2) fissata la scelta in (??), si scelgono le due carte per la coppia ($\binom{4}{2}$ esiti);
- (3) fissate le scelte in (??) e (??), si scelgono 3 carte con numeri o figure distinti e diversi da quello usato per la coppia. Il numero di scelte si determina come al punto (??), ma con 48 carte invece di 52 e 3 carte scelte invece di 5: ci sono dunque $4^3 \binom{12}{3}$ esiti possibili.

Quindi $|F| = 13 \binom{4}{2} 4^3 \binom{12}{3}$, da cui segue che

$$P(F) = \frac{13 \binom{4}{2} 4^3 \binom{12}{3}}{\binom{52}{5}} \simeq 0.422.$$

Esercizio 11. Una classe è costituita da 30 persone, tra cui Giacomo, Claudio e Nicola. Un insegnante divide in modo casuale la classe in tre gruppi di 10 persone.

- (i) Qual è la probabilità che Giacomo, Claudio e Nicola finiscano in tre gruppi distinti? (Non semplificare i coefficienti binomiali)
- (ii) Qual è la probabilità che finiscano nello stesso gruppo?

Soluzione 11. (i) Sia

$$\Omega := \{(A_1, A_2, A_3) : A_i \subseteq \{1, 2, \dots, 30\}, |A_i| = 10, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ per } i \neq j\},$$

e P la probabilità uniforme su Ω . Si noti che Ω è formato da *terne ordinate* di sottoinsiemi che formano una partizione dell'insieme $\{1, 2, \dots, 30\}$. (Non

sarebbe affatto sbagliato considerare terne non ordinate.) Non è restrittivo assumere che Giacomo, Claudio e Nicola corrispondano rispettivamente agli elementi 1, 2 e 3 di $\{1, 2, \dots, 30\}$. Un elemento di Ω si determina con la seguente sequenza di scelte successive:

- Scelgo A_1 : $\binom{30}{10}$ esiti.
- Scelgo A_2 da $\{1, 2, \dots, 30\} \setminus A_1$: $\binom{20}{10}$ esiti.

Ovviamente A_3 resta determinato. Quindi, per il Teorema ??,

$$|\Omega| = \binom{30}{10} \binom{20}{10}.$$

Consideriamo ora l'evento $B = \text{"Giacomo, Claudio e Nicola finiscono in tre gruppi distinti"}$. Un elemento di B si determina con la seguente sequenza di scelte successive:

- Scelgo 9 elementi per A_1 in $\{4, 5, \dots, 30\}$: $\binom{27}{9}$ esiti.
- Scelgo 9 elementi per A_2 in $\{4, 5, \dots, 30\} \setminus A_1$: $\binom{18}{9}$ esiti.
- Scelgo come disporre 1, 2 e 3 nei tre posti vuoti: $3! = 6$ esiti.

Dunque:

$$|B| = 6 \binom{27}{9} \binom{18}{9} \Rightarrow P(B) = \frac{6 \binom{27}{9} \binom{18}{9}}{\binom{30}{10} \binom{20}{10}} \simeq 0.246.$$

(ii) Sia $C = \text{"Giacomo, Claudio e Nicola finiscono nello stesso gruppo"}$. Un elemento di C si determina con la seguente sequenza di scelte successive:

- Scelgo il gruppo in cui inserire Giacomo, Claudio e Nicola: 3 esiti.
- Scelgo i rimanenti componenti di quel gruppo: $\binom{27}{7}$ esiti.
- Scelgo i componenti di uno (qualsiasi) degli altri due gruppi: $\binom{20}{10}$ esiti.

Dunque

$$P(C) = \frac{3 \binom{27}{7} \binom{20}{10}}{\binom{30}{10} \binom{20}{10}} = \frac{3 \binom{27}{7}}{\binom{30}{10}} \simeq 0.089.$$