

ESERCIZI - FASCICOLO 2

Esercizio 1. Un contadino si affida alle previsioni meteorologiche secondo le quali vi è una probabilità del 70% che la prossima settimana piova. Lui sa che se concimerà il suo campo, allora ci saranno un 60% di piante che seccheranno in caso che non piova mentre tale probabilità scende al 10% in caso di pioggia. Se invece decide di non concimare il suo campo ci saranno un 30% di piante che seccheranno nel caso che non piova e un 20% in caso di pioggia.

- (a) Se decide di concimare il suo terreno, qual è la percentuale media di piantine che sopravviveranno?
- (b) Cosa gli conviene fare se vuole massimizzare il numero medio di piantine che non seccheranno?

Esercizio 2. Consideriamo due urne ed una moneta truccata. La prima urna (urna *A*) contiene 2 palline rosse e 4 bianche, la seconda urna (urna *B*) contiene una pallina rossa, una bianca e una nera. Mentre la moneta truccata ha una probabilità p ($p \in [0, 1]$) di dare testa e una probabilità $1 - p$ di dare croce. Lanciamo la moneta, se esce testa estraiamo una pallina dall'urna *A* se esce croce estraiamo una pallina dall'urna *B*.

- (a) Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia nera? (Il risultato dipende dal parametro p .)
- (b) Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia rossa?
- (c) Qual è la probabilità che la moneta abbia dato testa sapendo che la pallina estratta è bianca?
- (d) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina bianca è $\frac{1}{2}$?
- (e) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina rossa è $\frac{1}{3}$?
- (f) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina nera è $\frac{1}{4}$?

Esercizio 3. Viene lanciata 8 volte una moneta regolare. Calcolare le seguenti probabilità.

- (a) Qual è la probabilità che i primi due lanci siano testa?
- (b) Qual è la probabilità che il terzo lancio sia croce?
- (c) Qual è la probabilità che i primi 4 lanci siano testa?
- (d) Qual è la probabilità che nei primi 3 lanci ci sia almeno una testa e almeno una croce?
- (e) Qual è la probabilità che tutti e 8 i lanci diano lo stesso esito?
- (f) Sapendo che i primi 3 lanci hanno dato testa, qual è la probabilità che tutti e 8 i lanci abbiano dato testa?
- (g) Sapendo che il terzo lancio ha dato croce, qual è la probabilità che tutti e 8 i lanci abbiano dato testa?
- (h) Qual è la probabilità che nei primi 5 lanci ci siano 2 teste e 3 croci (in qualsiasi ordine)?
- (i) Sapendo che tra i primi 2 lanci vi è almeno una testa, qual è la probabilità che tra i primi 2 lanci vi è almeno una croce?
- (l) Sapendo che nei primi 3 lanci vi è almeno una testa, qual è la probabilità che il primo lancio abbia dato testa?

Esercizio 4 (Paradosso delle tre carte). Infilo in una busta tre carte: una ha entrambe le facce rosse, una le ha entrambe nere, una ha una faccia rossa e una nera. Con gli occhi chiusi, pesco una carta a caso e la depongo sul tavolo su una faccia a caso, quindi apro gli occhi. Se la faccia che vedo è rossa, qual è la probabilità che anche l'altra faccia sia rossa?

Esercizio 5. Una compagnia di assicurazioni offre una polizza che prevede il pagamento di una cifra forfettaria C a fronte di un danno subito dal cliente. La compagnia classifica gli assicurati in tre categorie: “basso rischio”, “medio rischio” e “alto rischio”. Dei suoi assicurati, il 75% sono a “basso rischio”, il 20% a “medio rischio” e il restante 5% ad “alto rischio”.

È noto che gli assicurati a “basso rischio” hanno una probabilità del 2% di subire un danno che prevede il pagamento dell'assicurazione, mentre tale probabilità è del 10% per gli assicurati a “medio rischio” e del 20% per quelli ad “alto rischio”.

- (i) Qual è la probabilità che un individuo scelto a caso tra gli assicurati reclami il pagamento dell'assicurazione?
- (ii) Se un individuo reclama il pagamento dell'assicurazione, qual è la probabilità che sia nella categoria ad “alto rischio”?

Esercizio 6. Durante la notte, un taxi ha causato un incidente. In città operano due compagnie di taxi, una con i taxi gialli, l'altra con i taxi bianchi. Un testimone ha dichiarato che il taxi coinvolto nell'incidente era giallo. Sappiamo che i taxi bianchi sono l'85% dei taxi in città. Inoltre, la probabilità che un testimone, di notte, identifichi correttamente il colore del taxi è pari a 0.8.

- (i) Sulla base di queste informazioni, qual è la probabilità che il taxi coinvolto nell'incidente fosse in realtà bianco?
- (ii) Supponiamo che un secondo testimone abbia dichiarato che il taxi era giallo, e che la correttezza dell'identificazione del colore da parte di questo testimone sia indipendente da quella del primo. Sulla base di questa ulteriore informazione, qual è ora la probabilità che il taxi coinvolto nell'incidente fosse in realtà bianco?

Esercizio 7. Tre urne, etichettate con le lettere α, β, γ , contengono 10 palline ciascuna. Due urne contengono 5 palline rosse e 5 blu, mentre la terza contiene 3 palline rosse e 7 blu. Non sappiamo però quale sia l'urna con 3 palline rosse: in assenza di ulteriori informazioni, riteniamo che sia α, β o γ con la stessa probabilità.

Estraiamo ora 2 palline da ognuna delle tre urne. Se dall'urna α abbiamo estratto una pallina rossa e una blu, dall'urna β due palline rosse e dall'urna γ due palline blu, qual è la probabilità che l'urna γ sia quella contenente tre palline rosse?

Esercizio 8. Il Ministero della Pubblica Istruzione vuole stimare la frazione $\alpha \in (0, 1)$ di studenti di terza media che hanno preparazione scarsa in matematica. A tal fine, sottopone a un grande numero di studenti un quesito con 10 possibili risposte, di cui una sola è corretta. Assumiamo che gli studenti con una buona preparazione

in matematica rispondano correttamente al quesito, mentre quelli con preparazione scarsa diano una risposta scelta a caso (e non esistano altre possibilità). Sottoponendo ad una analisi più approfondita gli studenti che hanno risposto correttamente al quesito, si scopre che tra questi solo l'80% ha una buona preparazione in matematica. Sulla base di queste informazioni, si determini α .

Esercizio 9. Il signor Bianchi da Roma e il signor Rossi da Milano decidono di incontrarsi a Roma. All'ultimo momento, Rossi, che è un tipo molto indeciso, rimette al caso la decisione di partire, lanciando una moneta. Successivamente, in caso di esito positivo, per scegliere quale dei 6 treni a sua disposizione prendere, tira un dado regolare a sei facce. Se Bianchi va in stazione e osserva che Rossi non è su nessuno dei primi 5 treni, qual è la probabilità che Rossi arrivi con l'ultimo treno?

Esercizio 10. Dopo aver mescolato accuratamente un mazzo di carte da Poker, date ad un amico 13 carte.

- Qual è la probabilità che il vostro amico abbia esattamente un asso?
- Qual è la probabilità che il vostro amico abbia almeno un asso?
- Chiedete al vostro amico "hai un asso?" e lui risponde "sì". Qual è la probabilità che abbia più di un asso?
- Chiedete al vostro amico "hai asso l'asso di quadri?" e lui risponde "sì". Qual è la probabilità che abbia più di un asso?
- Il vostro amico ordina in un mazzetto le sue 13 carte. Chiedete "la prima carta del mazzetto è un asso?" e lui risponde "sì". Qual è la probabilità che abbia più di un asso?

Esercizio 11. Da un mazzo di 52 carte da Poker si estraggono, una alla volta e senza reimmissione, tre carte. Determinare:

- la probabilità che le prime due carte estratte siano due assi;
- la probabilità che la seconda carta estratta sia un asso;
- la probabilità che la prima carta estratta sia un asso sapendo che fra le altre due carte estratte non vi è alcun re;
- la probabilità che tra le prime due carte vi sia almeno un asso sapendo che la terza carta non è un re.

Esercizio 12. Un'urna contiene 10 palline, numerate da 1 a 10. Si eseguono estrazioni ripetute con reimmissione.

- Qual è la probabilità che la prima pallina estratta sia la numero 10?
- Quante estrazioni devo eseguire, in media, per riuscire ad estrarre la pallina numero 10?
- Qual è la probabilità che in 5 estrazioni si estraggano 5 palline distinte (cioè con numeri diversi)?
- Sapendo che le prime cinque palline estratte sono distinte, qual è la probabilità che tra esse ci sia la numero 10?

Esercizio 13. Nella sperimentazione di due nuovi farmaci, 40 volontari vengono divisi in due gruppi da 20. Un gruppo viene trattato con il farmaco AAA. Tra i 20 membri del gruppo, 14 hanno dei benefici dal trattamento, 4 hanno seri effetti collaterali e per i rimanenti 2 il farmaco non ha alcun effetto significativo. L'altro gruppo viene trattato con il farmaco BBB: 11 hanno dei benefici, 2 hanno seri effetti collaterali e per i restanti 7 il farmaco non ha alcun effetto significativo.

- (a) Consideriamo un individuo scelto a caso tra i 40 volontari. Qual è la probabilità che abbia avuto benefici dal trattamento?
- (b) Se sappiamo che l'individuo al punto precedente ha avuto benefici dal trattamento, qual è la probabilità che sia stato trattato con il farmaco AAA?
- (c) Supponiamo ora di scegliere a caso due individui fra i 40 volontari. Se sappiamo che entrambi hanno avuto benefici dal trattamento, qual è la probabilità che siano stati trattati con farmaci diversi?

Esercizio 14. Si lanci tre volte una moneta equilibrata. Consideriamo gli eventi:

$A =$ "ottengo almeno una testa e almeno una croce"

$B =$ "ottengo almeno due teste"

$C =$ "ottengo una testa e due croci"

- (a) Calcolare le probabilità di A , B e C .
- (b) Calcolare $P(B|A)$ e $P(C|A)$.