

Esempio Per determinare la presenza di un virus viene elaborato un test clinico con la seguente efficacia: se il virus è presente il test risulta positivo nel 99% dei casi, se il virus è assente risulta positivo il 2% dei casi. E' noto che il virus colpisce circa 4 persone su 10000. Un individuo scelto a caso viene sottoposto al test e risulta positivo. Qual è la probabilità che abbia il virus?

$A =$ "l'individuo ha il virus"

$B =$ "l'individuo risulta positivo al test"

$$P(A) = \frac{4}{10000} \quad P(B|A) = 0.99 \quad P(B|A^c) = 0.02$$

$$P(A|B) = ?$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = 0.99 \cdot \frac{4}{10000} + 0.02 \cdot \frac{9996}{10000}$$

$$\dots P(A|B) = 0.02$$

Formule generale delle probabilità totali

Siano $B_1, B_2, \dots, B_n$ eventi tali che

- $P(B_i) > 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$
- se $i \neq j$ allora $B_i \cap B_j = \emptyset$
- $\Omega = \bigcup_{i=1}^n B_i = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$

Allora per ogni evento A

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i) \end{aligned}$$

Indipendenza di eventi

Definizione Due eventi A e B si dicono indipendenti

$$\text{se } P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Nota, che se $P(B) > 0$, ciò equivale a $P(A|B) = P(A)$

Esempio Lanciamo due dadi, uno rosso e uno verde.

$A =$ "il punteggio del dado rosso è pari"

$B =$ "il punteggio del dado verde è almeno 3"

$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, \dots, 6\}$ $(i, j) \leftrightarrow$ il dado rosso ha
punteggio i e il dado
verde j .

P eventi equiprobabili

$$A = \{(i, j) : j = 1, \dots, 6; i = 2, 4, 6\}$$

$$B = \{(i, j) : i = 1, \dots, 6; j = 3, 4, 5, 6\}$$

$$|\Omega| = 36 \quad |A| = 18 \quad |B| = 24$$

$$A \cap B = \{(i, j) : i = 2, 4, 6; j = 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow |A \cap B| = 12$$

$$P(A \cap B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \quad P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad \text{cioè } A \text{ e } B \text{ sono indipendenti.}$$

Definizione Tre eventi A, B e C si dicono indipendenti se

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B) P(C)$$

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) P(C)$$

Esempio $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ Eventi equiprobabili

$$A = \{1, 2\} \quad B = \{1, 3\} \quad C = \{2, 3\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) P(B) \quad \text{Analogamente} \quad P(A \cap C) = P(A) P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) P(C)$$

Ma $P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A) P(B) P(C) \Rightarrow A, B$ e C non sono indip.

Definizione generale di indipendenza

Siano $A_1, A_2, \dots, A_m$ m eventi. Diciamo che sono indipendenti se per ogni $J \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$, $|J| \geq 2$

$$\text{si ha: } P\left(\bigcap_{J \in J} A_J\right) = \prod_{J \in J} P(A_J)$$