

Esempio Lanciamo due volte un dado. Consideriamo gli eventi:

$A = \text{"il risultato del 2° lancio è } 1, 2 \text{ o } 5 \text{"}$

$B = \text{" " " " " " } 4, 5 \text{ o } 6 \text{"}$

$C = \text{"la somma dei due punteggi è } 9 \text{"}$

A, B, C sono indipendenti?

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, \dots, 6\} \quad |\Omega| = 36$$

$$|A| = 18 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2} ; |B| = 18 \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2} ; |C| = 4 \Rightarrow P(C) = \frac{1}{9}$$

$$A \cap B \cap C = \{(4, 5)\} \quad P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = P(A) P(B) P(C)$$

$$|A \cap B| = 6 \quad P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \neq P(A) P(B) = \frac{1}{4}$$

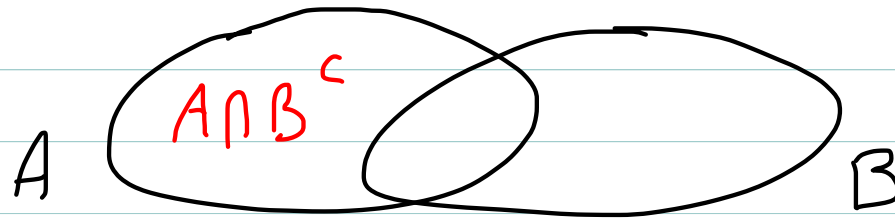
A, B e C non sono indipendenti.

Invarianza dell'indipendenza per complementazione

Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ eventi indipendenti. Supponiamo di rimpiazzare alcuni di questi eventi con i loro complementari. Allora gli n eventi ottenuti sono ancora indipendenti.

Facciamo vedere per $n=2$. Siano A e B eventi indipendenti. Mostriamo che A e B^c sono indipendenti.

$$P(A \cap B^c) = ?$$



$$A \cap B^c = A \setminus (A \cap B)$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B)$$

$$= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(B^c) \Rightarrow A \text{ e } B^c \text{ sono indipendenti.}$$

Schema delle prove ripetute e indipendenti

Supponiamo di giocare ripetutamente un gioco in cui la probabilità di successo è $p \in [0,1]$. Assumiamo che gli esiti di ripetizioni distinte siano indipendenti.

1) Qual è la probabilità di vincere le prime n ripetizioni?

2) Qual è la probabilità che il primo successo avvenga all' n -esima ripetizione?

3) Qual è la probabilità di vincere le prime K ripetizioni e di perdere le successive $n - K$?

4) Qual è la probabilità di vincere esattamente K volte nelle prime n ripetizioni?

Sia, per $i \geq 1$, $A_i = \text{"l' } i\text{-esima ripetizione è un successo"}$

- In ogni $n \geq 2$, gli eventi $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono indipendenti.

- $P(A_i) = p$

$$1) P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_m) = p^n$$

$$2) P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{m-1}^c \cap A_m) = P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \cdot \dots \cdot P(A_{m-1}^c) \cdot P(A_m) \\ = (1-p)^{m-1} p$$

$$3) P(A_1 \cap \dots \cap A_k \cap A_{k+1}^c \cap \dots \cap A_m^c) = P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_k) \cdot P(A_{k+1}^c) \cdot \dots \cdot P(A_m^c) \\ = p^k (1-p)^{m-k}$$

Notare che $J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ con $|J| = k$

$$\left(\bigcap_{i \in J} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{h \in J^c} A_h^c \right) = \text{"vinco le palle con indice in } J \text{ e perdo quelle con indice in } J^c \text{"} = B_J$$

$$\text{dove } J^c = \{1, \dots, n\} \setminus J$$

$$P(B_J) = p^k (1-p)^{n-k}$$

4) $C =$ "nelle prime n prove ottengo esattamente k successi"

$$C = \bigcup_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |J| = k}} B_J \quad \text{I } B_J \text{ sono disgiunti}$$

$$P(C) = \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |J| = k}} P(B_J) = \sum_J p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= |\{J \subseteq \{1, \dots, n\}; |J| = k\}| p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Problema della rovina del giocatore

Due giocatori, A e B, lanciano ripetutamente una moneta, in cui esce testa con probabilità $p \in (0, 1)$. Ogni volta che esce testa A dà un euro a B, viceversa ogni volta che esce croce.

All'inizio A ha m euro, e B ha $N-m$.

Qual è la probabilità che il giocatore A vada in rovina, cioè perda tutto il suo capitale?