

Problema della rovina del giocatore

Due giocatori, A e B, lanciano ripetutamente una moneta, in cui esce testa con probabilità $p \in (0, 1)$. Ogni volta che esce testa A dà un euro a B, viceversa ogni volta che esce croce.

All'inizio A ha m euro, e B ha $N-m$.

Qual è la probabilità che il giocatore A vada in rovina, cioè perda tutto il suo capitale?

Sia $E =$ "il giocatore A va in rovina"

$P(E) = P_i$ Notare che mettiamo un indice i
in quanto tale probab. dipende dall'apito
iniziale i del giocatore A

$$P_0 = 1 \quad P_N = 0$$

Sia $H =$ "al primo lancio esce testa"

$$P(E) = \overbrace{P(E|H)}^{P_{i-1}} P(H) + \overbrace{P(E|H^c)}^{P_{i+1}} P(H^c)$$

Quindi: $P_i = p P_{i-1} + (1-p) P_{i+1}$

$$p P_i + (1-p) P_i = p P_{i-1} + (1-p) P_{i+1}$$

$$p (P_i - P_{i-1}) = (1-p) (P_{i+1} - P_i) \Leftrightarrow P_{i+1} - P_i = \frac{p}{1-p} (P_i - P_{i-1})$$

Sia $q = \frac{p}{1-p}$

$$P_2 - P_1 = q (P_1 - 1)$$

$$P_3 - P_2 = q (P_2 - P_1) = q^2 (P_1 - 1)$$

$$P_4 - P_3 = q (P_3 - P_2) = q^3 (P_1 - 1)$$

$$\text{In generale } P_i - P_{i-1} = q^{i-1} (P_1 - 1)$$

$$P_i - 1 = (P_i - P_{i-1}) + (P_{i-1} - P_{i-2}) + \dots + (P_1 - 1)$$

$$= q^{i-1} (P_1 - 1) + q^{i-2} (P_1 - 1) + \dots + P_1 - 1$$

$$= (P_1 - 1) (q^{i-1} + q^{i-2} + \dots + q + 1)$$

$$\text{Sappiamo che : } 1 + q + \dots + q^{i-1} = \begin{cases} \frac{q^i - 1}{q - 1} & \text{se } q \neq 1 \\ i & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

$$\text{Quindi } P_{i-1} = \begin{cases} \frac{q^i - 1}{q - 1} (P_1 - 1) & \text{se } q \neq 1 \\ i (P_1 - 1) & \text{se } q = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Ponendo $i = N$ e usando il fatto che $P_N = 0$

$$-1 = P_{N-1} = \begin{cases} \frac{q^N - 1}{q - 1} (P_1 - 1) & \text{se } q \neq 1 \\ N (P_1 - 1) & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_{i-1} = \begin{cases} - \frac{q^i - 1}{q^N - 1} & q \neq 1 \\ - \frac{1}{N} & q = 1 \end{cases} = P_i = \begin{cases} 1 - \frac{q^i - 1}{q^N - 1} = \frac{q^N - q^i}{q^N - 1} & q \neq 1 \\ 1 - \frac{1}{N} & q = 1 \end{cases}$$

Substituendo in (1)

$$P_i - 1 = \frac{q^i - 1}{\cancel{q - 1}} \left(- \frac{\cancel{q - 1}}{q^N - 1} \right) = - \frac{q^i - 1}{q^N - 1}$$

$$P_i = 1 - \frac{q^i - 1}{q^N - 1} = \frac{q^N - q^i}{q^N - 1} \quad \text{se } q \neq 1$$

$$P_i - 1 = - \frac{i}{N} \Rightarrow P_i = 1 - \frac{i}{N} = \frac{N - i}{N} \quad \text{se } q = 1$$

$$\text{donde } q = \frac{p}{1 - p}$$

Sia Q_i la probab. che A'ia rovinato B,
sopra assumendo che il capitale iniziale
di A sia i euro.

Q_i si ottiene, per simmetria, da P_i ,
sostituendo p con $1-p$ (equivalentemente q con $\frac{1}{q}$)
e i con $N-i$

Quindi, ad esempio se $q \neq 1$,
$$Q_i = \frac{\frac{1}{q^N} - \frac{1}{q^{N-i}}}{\frac{1}{q^N} - 1} = \frac{1 - q^i}{1 - q^N}$$

Ma allora :

$$P_i + Q_i = \frac{2^N - 2^i}{2^N - 1} + \frac{1 - 2^i}{1 - 2^N} = \frac{2^N - 1}{2^N - 1} = 1$$

In particolare, la probabilità che nessuno dei due giocatori sia zwinato è 0!

Supponiamo di avere uno spazio campionario Ω ,
con una probabilità P , e fissiamo un evento
 B con $P(B) > 0$.

Proposizione La funzione che ad ogni evento
 A associa $P(A|B)$ è una probabilità.

Dimostrazione Dobbiamo dimostrare che

- $P(\Omega|B) = 1$;
- Se A_1, A_2 sono disgiunti, $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$

$$P(R|B) = \frac{P(R \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \quad \text{visto che } B = B \cap R$$

Siano A_1 e A_2 t.c. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$$P(A_1 \cup A_2 | B) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(\overset{\text{disgiunti}}{(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)})}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} \\ \stackrel{|}{=} P(A_1|B) + P(A_2|B)$$