ESERCIZI - FASCICOLO 2

Esercizio 1. Un contadino si affida alla previsioni metereologiche secondo le quali vi è una probabilità del 70% che la prossima settimana piova. Lui sa che se concimerà il suo campo, allora ci saranno un 60% di piante che seccheranno in caso che non piova mentre tale probabilità scende al 10% in caso di pioggia. Se invece decide di non concimare il suo campo ci saranno un 30% di piante che seccheranno nel caso che non piova e un 20% in caso di pioggia.

- (a) Se decide di concimare il suo terreno, qual è la percentuale media di piantine che sopravviveranno?
 (b) Cosa gli conviene fare se vuole massimizzare il numero medio di piantine che non seccheranno?

Soluzione 1. (a) 75%, (b) Se decide di non concimare la percentuale media di piantine che sopravviveranno è del 77% dunque se vuole massimizzare la percentuale media di piantine che sopravviveranno gli conviene non concimare.

Esercizio 2. Consideriamo due urne ed una moneta truccata. La prima urna (urna A) contiene 2 palline rosse e 4 bianche, la seconda urna (urna B) contiene una pallina rossa, una bianca e una nera. Mentre la moneta truccata ha una probabilità p ($p \in [0, 1]$) di dare testa e una probabilità $1 - p$ di dare croce. Lanciamo la moneta, se esce testa estraiamo una pallina dall'urna A se esce croce estraiamo una pallina dall'urna B.

- (a) Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia nera? (Il risultato dipende dal parametro p .)
 (b) Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia rossa?
 (c) Qual è la probabilità che la moneta abbia dato testa sapendo che la pallina estratta è bianca?
 (d) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina bianca è $\frac{1}{2}$?
 (e) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina rossa è $\frac{1}{3}$?
 (f) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina nera è $\frac{1}{4}$?

Soluzione 2. Consideriamo i seguenti eventi:

T = "Il risultato del lancio della moneta è testa";

A = "La pallina viene estratta dall'urna A";

B = "La pallina viene estratta dall'urna B";

R = "La pallina estratta è Rossa";

N = "La pallina estratta è Nera";

B_i = "La pallina estratta è Bianca";

Le ipotesi della traccia diventano: $A = T$, $B = T^c$, $P(A) = p$, $P(B) = 1 - p$, $P(R|A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(B_i|A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(N|A) = 0$, $P(R|B) = \frac{1}{3}$, $P(B_i|B) = \frac{1}{3}$, $P(N|B) = \frac{1}{3}$.

$$(a) P(N) = P(N|A) \cdot P(A) + P(N|B) \cdot P(B) = \frac{1-p}{3}$$

$$(b) P(R) = P(R|A) \cdot P(A) + P(R|B) \cdot P(B) = \frac{1}{3}$$

$$(c) P(B_i) = P(B_i|A) \cdot P(A) + P(B_i|B) \cdot P(B) = \frac{1+p}{3}$$

$$\text{Utilizzando Bayes } P(T|B_i) = \frac{P(B_i|T) \cdot P(T)}{P(B_i|T) \cdot P(T) + P(B_i|T^c) \cdot P(T^c)} = \frac{2p}{p+1}$$

- (d) $\frac{1+p}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$
 (e) $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \forall p \in [0, 1]$
 (f) $\frac{1-p}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow p = \frac{1}{4}$

Esercizio 3. Viene lanciata 8 volte una moneta regolare. Calcolare le seguenti probabilità.

- (a) Qual è la probabilità che i primi due lanci siano testa?
 (b) Qual è la probabilità che il terzo lancio sia croce?
 (c) Qual è la probabilità che i primi 4 lanci siano testa?
 (d) Qual è la probabilità che nei primi 3 lanci ci sia almeno una testa e almeno una croce?
 (e) Qual è la probabilità che tutti e 8 i lanci diano lo stesso esito?
 (f) Sapendo che i primi 3 lanci hanno dato testa, qual è probabilità che tutti e 8 i lanci abbiano dato testa?
 (g) Sapendo che il terzo lancio ha dato croce, qual è probabilità che tutti e 8 i lanci abbiano dato testa?
 (h) Qual è la probabilità che nei primi 5 lanci ci siano 2 teste e 3 croci (in qualsiasi ordine)?
 (i) Sapendo che tra i primi 2 lanci vi è almeno una testa, qual è la probabilità che tra i primi 2 lanci vi è almeno una croce?
 (l) Sapendo che nei primi 3 lanci vi è almeno una testa, qual è la probabilità che il primo lancio abbia dato testa?

Soluzione 3. (a) $\frac{1}{4}$, (b) $\frac{1}{2}$, (c) $\frac{1}{16}$, (d) $\frac{3}{4}$, (e) $\frac{1}{128}$, (f) $\frac{1}{32}$, (g) 0, (h) $\frac{5}{16}$, (i) $\frac{2}{3}$, (l) $\frac{4}{7}$,

Esercizio 4 (Paradosso delle tre carte). Infilo in una busta tre carte: una ha entrambe le facce rosse, una le ha entrambe nere, una ha una faccia rossa e una nera. Con gli occhi chiusi, pescò una carta a caso e la depongo sul tavolo su una faccia a caso, quindi apro gli occhi. Se la faccia che vedo è rossa, qual è la probabilità che anche l'altra faccia sia rossa?

Soluzione 4. Consideriamo gli eventi: NN = "la carta pescata è quella con due facce nere", RR = "la carta pescata è quella con due facce rosse", NR = "la carta pescata è quella con una faccia rossa e una nera", R = "la faccia che vedo è rossa". Per ipotesi si ha

$$P(NN) = P(RR) = P(NR) = \frac{1}{3}$$

$$P(R|NN) = 0, \quad P(R|RR) = 1, \quad P(R|NR) = \frac{1}{2}.$$

Quindi, la probabilità cercata è, usando la Formula di Bayes,

$$P(RR|R) = \frac{P(R|RR)P(RR)}{P(R|RR)P(RR) + P(R|NN)P(NN) + P(R|NR)P(NR)} = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 5. Una compagnia di assicurazioni offre una polizza che prevede il pagamento di una cifra forfettaria C a fronte di un danno subito dal cliente. La compagnia

classifica gli assicurati in tre categorie: “basso rischio”, “medio rischio” e “alto rischio”. Dei suoi assicurati, il 75% sono a “basso rischio”, il 20% a “medio rischio” e il restante 5% ad “alto rischio”.

È noto che gli assicurati a “basso rischio” hanno una probabilità del 2% di subire un danno che prevede il pagamento dell’assicurazione, mentre tale probabilità è del 10% per gli assicurati a “medio rischio” e del 20% per quelli ad “alto rischio”.

- (i) Qual è la probabilità che un individuo scelto a caso tra gli assicurati reclaims il pagamento dell’assicurazione?
- (ii) Se un individuo reclama il pagamento dell’assicurazione, qual è la probabilità che sia nella categoria ad “alto rischio”?

Soluzione 5. (i) Consideriamo gli eventi: A_1 = “l’individuo scelto è della categoria “basso rischio””; A_2 = “l’individuo scelto è della categoria “medio rischio””; A_3 = “l’individuo scelto è della categoria “alto rischio””; B = “l’individuo reclama il pagamento dell’assicurazione”. Sappiamo che

$$P(B|A_1) = 0.02, \quad P(B|A_2) = 0.1, \quad P(B|A_3) = 0.2, \\ P(A_1) = 0.75, \quad P(A_2) = 0.2, \quad P(A_3) = 0.05.$$

Per la formula delle probabilità totali (Proposizione ??)

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(B|A_i)P(A_i) = 0.02 \cdot 0.75 + 0.1 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.05 = 0.045.$$

- (ii) Usando la Formula di Bayes (Teorema ??)

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B)} = \frac{0.2 \cdot 0.05}{0.045} = \frac{2}{9}.$$

Esercizio 6. Durante la notte, un taxi ha causato un incidente. In città operano due compagnie di taxi, una con i taxi gialli, l’altra con i taxi bianchi. Un testimone ha dichiarato che il taxi coinvolto nell’incidente era giallo. Sappiamo che i taxi bianchi sono l’85% dei taxi in città. Inoltre, la probabilità che un testimone, di notte, identifichi correttamente il colore del taxi è pari a 0.8.

- (i) Sulla base di queste informazioni, qual è la probabilità che il taxi coinvolto nell’incidente fosse in realtà bianco?
- (ii) Supponiamo che un secondo testimone abbia dichiarato che il taxi era giallo, e che la correttezza dell’identificazione del colore da parte di questo testimone sia indipendente da quella del primo. Sulla base di questa ulteriore informazione, qual è ora la probabilità che il taxi coinvolto nell’incidente fosse in realtà bianco?

Soluzione 6. (i) Consideriamo gli eventi: A = “il taxi coinvolto è bianco”, B = “il testimone dichiara di aver visto un taxi giallo”. Sappiamo che $P(A) = 0.85$, $P(B|A) = 0.2$, $P(B|A^c) = 0.8$. Perciò, usando la Formula di Bayes,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} = \frac{17}{29}.$$

(ii) Sia C = “il secondo testimone dichiara di aver visto un taxi giallo”. Per ipotesi $P(B \cap C|A) = P(B|A)P(C|A) = (0.2)^2 = 0.04$ e, analogamente, $P(B \cap C|A^c) = P(B|A^c)P(C|A^c) = (0.8)^2 = 0.64$. Allora

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(B \cap C|A)P(A)}{P(B \cap C|A)P(A) + P(B \cap C|A^c)P(A^c)} = \frac{17}{65}.$$

Esercizio 7. Tre urne, etichettate con le lettere α, β, γ , contengono 10 palline ciascuna. Due urne contengono 5 palline rosse e 5 blu, mentre la terza contiene 3 palline rosse e 7 blu. Non sappiamo però quale sia l’urna con 3 palline rosse: in assenza di ulteriori informazioni, riteniamo che sia α, β o γ con la stessa probabilità.

Estraiamo ora 2 palline da ognuna delle tre urne. Se dall’urna α abbiamo estratto una pallina rossa e una blu, dall’urna β due palline rosse e dall’urna γ due palline blu, qual è la probabilità che l’urna γ sia quella contenente tre palline rosse?

Soluzione 7. Per $x \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$, si A_x l’evento “l’urna con 3 palline rosse è l’urna x ”. Sia inoltre B l’evento “dall’urna α abbiamo estratto una pallina rossa e una blu, dall’urna β due palline rosse e dall’urna γ due palline blu”. Abbiamo

$$P(B|A_\alpha) = \frac{3 \cdot 7}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{84}{3645}.$$

$$P(B|A_\beta) = \frac{5 \cdot 5}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{243}.$$

$$P(B|A_\gamma) = \frac{5 \cdot 5}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{14}{243}.$$

$$P(A_x) = \frac{1}{3}$$

per $x \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$. In conclusione, usando la Formula di Bayes,

$$P(A_\gamma|B) = \frac{P(B|A_\gamma)P(A_\gamma)}{\sum_{x \in \{\alpha, \beta, \gamma\}} P(B|A_x)P(A_x)} = \frac{35}{54}.$$

Esercizio 8. Il Ministero della Pubblica Istruzione vuole stimare la frazione $\alpha \in (0, 1)$ di studenti di terza media che hanno preparazione scarsa in matematica. A tal fine, sottopone a un grande numero di studenti un quesito con 10 possibili risposte, di cui una sola è corretta. Assumiamo che gli studenti con una buona preparazione in matematica rispondano correttamente al quesito, mentre quelli con preparazione scarsa diano una risposta scelta a caso (e non esistano altre possibilità). Sottoponendo ad una analisi più approfondita gli studenti che hanno risposto corretta-

mente al quesito, si scopre che tra questi solo l'80% ha una buona preparazione in matematica. Sulla base di queste informazioni, si determini α .

Soluzione 8. Immaginiamo di scegliere uno studente a caso e consideriamo gli eventi $A :=$ "lo studente ha una preparazione scarsa in matematica" e $B :=$ "lo studente risponde correttamente al quesito". Secondo i dati forniti dal problema

$$P(A) = \alpha, \quad P(B|A) = \frac{1}{10}, \quad P(B|A^c) = 1, \quad P(A^c|B) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}.$$

Si ricava quindi

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = \frac{\alpha}{10} + (1 - \alpha) = 1 - \frac{9}{10}\alpha,$$

da cui

$$P(B|A^c) = \frac{P(A^c|B)P(B)}{P(A^c)} = \frac{\frac{4}{5}(1 - \frac{9}{10}\alpha)}{1 - \alpha} = \frac{\frac{4}{5} - \frac{18}{25}\alpha}{1 - \alpha},$$

e dato che $P(B|A^c) = 1$ si ottiene infine

$$\frac{\frac{4}{5} - \frac{18}{25}\alpha}{1 - \alpha} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{5}{7} \simeq 71,4\%.$$

Esercizio 9. Il signor Bianchi da Roma e il signor Rossi da Milano decidono di incontrarsi a Roma. All'ultimo momento, Rossi, che è un tipo molto indeciso, rimette al caso la decisione di partire, lanciando una moneta. Successivamente, in caso di esito positivo, per scegliere quale dei 6 treni a sua disposizione prendere, tira un dado regolare a sei facce. Se Bianchi va in stazione e osserva che Rossi non è su nessuno dei primi 5 treni, qual è la probabilità che Rossi arrivi con l'ultimo treno?

Soluzione 9. Introducendo gli eventi

$T_i \equiv$ "Rossi parte con l' i -esimo treno",

$V \equiv$ "Rossi parte per Roma",

$N \equiv$ "Rossi non prende nessuno dei primi 5 treni"

si ha

$$\begin{aligned} P(V) &= \frac{1}{2} \\ P(T_i) &= P(T_i \cap V) = P(T_i|V)P(V) = \frac{1}{6} \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \\ P(N) &= P(V^c) + P(T_6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12} \\ P(T_6 | N) &= \frac{P(N | T_6)P(T_6)}{P(N)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Esercizio 10. Dopo aver mescolato accuratamente un mazzo di carte da Poker, date ad un amico 13 carte.

- (a) Qual è la probabilità che il vostro amico abbia esattamente un asso?
- (b) Qual è la probabilità che il vostro amico abbia almeno un asso?
- (c) Chiedete al vostro amico “hai un asso?” e lui risponde “sì”. Qual è la probabilità che abbia più di un asso?
- (d) Chiedete al vostro amico “hai l’asso di quadri?” e lui risponde “sì”. Qual è la probabilità che abbia più di un asso?
- (e) Il vostro amico ordina in un mazzetto le sue 13 carte. Chiedete “la prima carta del mazzetto è un asso?” e lui risponde “sì”. Qual è la probabilità che abbia più di un asso?

Soluzione 10. (a)

$$\frac{4 \binom{48}{12}}{\binom{52}{13}}.$$

(b)

$$1 - \frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}}.$$

- (c) Come nei punti precedenti, usiamo come spazio degli esiti dell’esperimento l’insieme S delle combinazioni di 13 carte scelte dalle 52. Consideriamo gli eventi $A =$ “nelle 13 carte c’è almeno un asso”, e $B =$ “nelle 13 carte ci sono almeno due assi”. Dobbiamo calcolare $P(B|A)$. Già sappiamo che

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}}.$$

Inoltre

$$P(B) = 1 - \frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}} - \frac{4 \binom{48}{12}}{\binom{52}{13}}.$$

Essendo $B \subseteq A$, abbiamo

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} \simeq 0.37.$$

- (d) Sia $C =$ “nel mazzo c’è l’asso di quadri”. Dobbiamo calcolare $P(B|C) = \frac{B \cap C}{P(C)}$. Cominciamo con il contare gli elementi di C , cioè tutte le combinazioni che contengono l’asso di quadri. Facilmente $|C| = \binom{51}{12}$. Contiamo ora gli elementi di $B \cap C$. Notare che $B \cap C = C \setminus (B^c \cap C)$, cioè $B \cap C$ è contiene gli elementi di C eccetto quelli che non hanno altri assi oltre a quello di quadri. Abbiamo: $|B^c \cap C| = \binom{48}{12}$, sicché $|B \cap C| = \binom{51}{12} - \binom{48}{12}$. In conclusione

$$P(B|C) = \frac{\binom{51}{12} - \binom{48}{12}}{\binom{51}{12}} \simeq 0.56.$$

- (e) Trattandosi di un mazzetto ordinato, conviene ora considerare come spazio degli esiti S l'insieme delle disposizioni semplici. In questo caso

$$|S| = 52 \cdot 51 \cdots 40.$$

Sia A = “la prima carta del mazzetto è un asso”, e B = “nel mazzetto ci sono almeno due assi”. Abbiamo: $|A| = 51 \cdot 50 \cdots 40$. Gli elementi di $A \cap B^c$ sono quelli la cui prima carta è l'asso di quadri, e tra le altre non ci sono assi. Si ha $|A \cap B^c| = 48 \cdot 47 \cdots 37$, da cui $|A \cap B| = 51 \cdot 50 \cdots 40 - 48 \cdot 47 \cdots 37$. In conclusione

$$P(B|A) = \frac{|A \cap B|}{|A|} = 1 - \frac{48 \cdot 47 \cdots 37}{51 \cdot 50 \cdots 40} \simeq 0.44.$$

Esercizio 11. Da un mazzo di 52 carte da Poker si estraggono, una alla volta e senza reimmissione, tre carte. Determinare:

- la probabilità che le prime due carte estratte siano due assi;
- la probabilità che la seconda carta estratta sia un asso;
- la probabilità che la prima carta estratta sia un asso sapendo che fra le altre due carte estratte non vi è alcun re;
- la probabilità che tra le prime due carte vi sia almeno un asso sapendo che la terza carta non è un re.

Soluzione 11. (a) $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}}$.

(b) $\frac{4}{52}$.

- (c) Conviene qui procedere con maggiore cura. Sia Ω l'insieme delle disposizioni senza ripetizione di tre carte scelte fra le 52. Si ha $|\Omega| = 52 \cdot 51 \cdot 50$. Consideriamo gli eventi A = “la prima carta è un asso”, e B = “fra la seconda e la terza carta non vi è alcun re”. Contando le scelte successive, abbiamo che

$$|A \cap B| = 4 \cdot 47 \cdot 46,$$

da cui $P(A \cap B) = \frac{4 \cdot 47 \cdot 46}{52 \cdot 51 \cdot 50}$. Per calcolare $P(B)$, conviene osservare che, per simmetria, $|B| = |\tilde{B}|$, dove $\tilde{B}$ = “fra la prima e la seconda carta non vi è alcun re”. Segue che

$$|B| = 48 \cdot 47 \cdot 50,$$

e quindi $P(B) = \frac{48 \cdot 47 \cdot 50}{52 \cdot 51 \cdot 50}$, da cui

$$P(A|B) = \frac{4 \cdot 47 \cdot 46}{48 \cdot 47 \cdot 50} = \frac{23}{300} \simeq 0.077.$$

- (d) Di nuovo per simmetria, è lo stesso calcolare la probabilità che fra la seconda e la terza carta vi sia almeno un asso sapendo che la prima carta non è un re. Siano allora C = “fra la seconda e la terza carta c’è almeno un asso”, e D = “la prima carta non è un re”. Contiamo gli elementi di $C^c \cap D$. Questo evento contiene le terne in cui la prima carta non è un re, e tra le altre due non vi è alcun asso. Il numero di tali terne in cui la prima carta è un asso è $4 \cdot 48 \cdot 47$, mentre il numero di quelle in cui la prima carta non è un asso (e neppure un re) è $44 \cdot 47 \cdot 46$. Quindi

$$|C^c \cap D| = 4 \cdot 48 \cdot 47 + 44 \cdot 47 \cdot 46.$$

Essendo, ovviamente, $P(D) = 48/52$,

$$P(C^c|D) = \frac{4 \cdot 48 \cdot 47 + 44 \cdot 47 \cdot 46}{52 \cdot 51 \cdot 50} \simeq 0.725$$

da cui $P(C|D) = 1 - P(C^c|D) \simeq 0.275$.

Esercizio 12. Un’urna contiene 10 palline, numerate da 1 a 10. Si eseguono estrazioni ripetute con reimmissione.

- Qual è la probabilità che la prima pallina estratta sia la numero 10?
- Quante estrazioni devo eseguire, in media, per riuscire ad estrarre la pallina numero 10?
- Qual è la probabilità che in 5 estrazioni si estraggano 5 palline distinte (cioè con numeri diversi)?
- Sapendo che le prime cinque palline estratte sono distinte, qual è la probabilità che tra esse ci sia la numero 10?

Soluzione 12. (a) Trattandosi della scelta di una pallina su 10, tale probabilità vale $\frac{1}{10}$.

- Il numero di estrazioni X per riuscire ad estrarre la pallina numero 10 ha distribuzione geometrica di parametro $p = \frac{1}{10}$, per cui $E(X) = \frac{1}{p} = 10$.
- Sia Ω l’insieme delle disposizioni con ripetizione di 5 palline, P la probabilità uniforme su Ω , e A l’insieme delle disposizioni con palline distinte, cioè senza ripetizione. Si ha

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5}.$$

- Sia B l’insieme delle disposizioni che contengono la pallina numero 10. Gli elementi di $A \cap B$ corrispondono alla scelta della posizione in cui mettere la pallina numero 10 (5 possibilità) e di altre 4 carte distinte e diverse dalla 10 ($9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ possibilità). Dunque

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 13. Nella sperimentazione di due nuovi farmaci, 40 volontari vengono divisi in due gruppi da 20. Un gruppo viene trattato con il farmaco AAA. Tra i 20 membri del gruppo, 14 hanno dei benefici dal trattamento, 4 hanno seri effetti collaterali e per i rimanenti 2 il farmaco non ha alcun effetto significativo. L'altro gruppo viene trattato con il farmaco BBB: 11 hanno dei benefici, 2 hanno seri effetti collaterali e per i restanti 7 il farmaco non ha alcun effetto significativo.

- Consideriamo un individuo scelto a caso tra i 40 volontari. Qual è la probabilità che abbia avuto benefici dal trattamento?
- Se sappiamo che l'individuo al punto precedente ha avuto benefici dal trattamento, qual è la probabilità che sia stato trattato con il farmaco AAA?
- Supponiamo ora di scegliere a caso due individui fra i 40 volontari. Se sappiamo che entrambi hanno avuto benefici dal trattamento, qual è la probabilità che siano stati trattati con farmaci diversi?

Soluzione 13. (a) Sia Ω l'insieme dei 40 individui, e C l'insieme di coloro che hanno ricevuto benefici dal trattamento. Poiché $|C| = 25$ e la scelta casuale induce la probabilità uniforme P su Ω , si conclude che

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}.$$

- (b) Sia A l'insieme degli individui trattati con AAA.

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{|A \cap C|}{|C|} = \frac{14}{25}.$$

- (c) Qui dobbiamo cambiare la scelta di Ω . Sia Ω l'insieme delle combinazioni di due elementi scelti fra i 40 individui, sicché $|\Omega| = \binom{40}{2}$, e sia P la probabilità uniforme su Ω . Sia B l'insieme degli elementi di Ω per cui entrambi gli elementi hanno ricevuto benefici dal trattamento. Notare che $|B| = \binom{25}{2}$. Sia infine D l'insieme degli elementi di Ω in cui i due individui sono stati trattati con farmaci diversi. Notare che $|D| = 20^2$, in quanto ogni elemento di D corrisponde alla scelta di un individuo trattato con AAA e un individuo trattato con BBB. Inoltre, gli elementi di $B \cap D$ corrispondono alla scelta di un individuo fra i 14 trattati con AAA che hanno avuto benefici, e un individuo fra gli 11 trattati con BBB che hanno avuto benefici, quindi $|B \cap D| = 14 \cdot 11$. Dunque

$$P(D|B) = \frac{|B \cap D|}{|B|} = \frac{14 \cdot 11}{\binom{25}{2}} \simeq 0.513.$$

Esercizio 14. Si lanci tre volte una moneta equilibrata. Consideriamo gli eventi:

A = "ottengo almeno una testa e almeno una croce"

B = "ottengo almeno due teste"

C = "ottengo una testa e due croci"

- (a) Calcolare le probabilità di A , B e C .
(b) Calcolare $P(B|A)$ e $P(C|A)$.

Soluzione 14. (a)

$$P(A) = P(1 \text{ testa e 2 croci}) + P(2 \text{ teste e 1 croce}) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$$

$$P(B) = P(2 \text{ teste e 1 croce}) + P(3 \text{ teste}) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{3}{8}$$

(b)

$$P(A \cap B) = P(\text{due teste e una croce}) = \frac{3}{8} \Rightarrow P(B|A) = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap C) = P(C) = \frac{3}{8} \Rightarrow P(C|A) = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$