

VARIABILI ALEATORIE O CASUALI

Una variabile aleatoria è una quantità numerica il cui valore dipende dall'esito di un esperimento aleatorio.

Esempi

1) Un'urna contiene 10 palline numerate da 1 a 10.

Ne estraiamo, successivamente e con reimmissione, due.

Sia X il più grande dei due numeri estratti.

2) Come al punto 1, ma le due estrazioni avvengono senza reimmissione.

3) In uno schema di prove ripetute e indipendenti con prob. di successo p , sia X il n° di prove fino all'ottenimento del primo successo

4) In uno schema di n prove ripetute e indipendenti, sia X il numero di successi ottenuti.

5) Al casinò giochiamo la "strategia del raddoppio": con un capitale iniziale $C = 1023 \text{ €}$ iniziamo a puntare 1 € sul rosso. Se perdiamo, continuiamo a puntare sul rosso raddoppiando la puntata. Ci fermiamo o appena esce il nero, o quando non abbiamo più soldi.

$$X = \text{capitale finale} - C$$

Sia Ω uno spazio campionario con la probabilità P

Definizione Si dice variabile aleatoria una qualunque funzione

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Se $A \subseteq \mathbb{R}$, l'insieme $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$ è un evento.

Per brevità denotiamo questo evento con $\{X \in A\}$ e la sua probabilità con $P(X \in A)$

Se $A = \{x\}$ scriviamo $\{X = x\}$ e $P(X = x)$ invece di $\{X \in \{x\}\}$ e $P(X \in \{x\})$

Se $A = (-\infty, x]$ scriviamo $\{X \leq x\}$ e $P(X \leq x)$

Dato una v.a. X , l'insieme $\{X(\omega) : \omega \in \Omega\} \subseteq \mathbb{R}$ si dice immagine della v.a. X .

Definizione Una v.a. X si dice discreta se la sua immagine è un sottoinsieme finito o numerabile di $\mathbb{R}$.

Sia X una v.a. discreta. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ poniamo

$$p(x) = P(X=x) \quad \text{Notare che: } p: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

e se x non appartiene all'immagine di X , allora $p(x) = 0$

La funzione p si dice densità (discreta) di X

Esempio 1 2 estrazioni con rimm., una con palline numerate da 1 a 10.
 $X =$ n° più alto estratto.

Immagina di $X: \{1, 2, \dots, 10\}$. Sia $K \in \{1, \dots, 10\}$, calcoliamo

$$p(K) = P(X=K)$$

$\Omega = \{1, \dots, 10\} \times \{1, \dots, 10\}$ P prob. a tutti equiprobabili

$$P(X=K) = \frac{|\{X=K\}|}{|\Omega|} = \frac{|\{X=K\}|}{100}$$

$$|\{X=K\}| = |\{K \text{ alla } 1^a, < K \text{ alla } 2^a\}| + |\{K \text{ alla } 2^a, < K \text{ alla } 1^a\}| + |\{(K, K)\}|$$

$$= K-1 + K-1 + 1 = 2K-1 \Rightarrow p(K) = \frac{2K-1}{100}$$

Esempio 2 Come sopra ma senza rimmissione

Immagine di X : $\{2, 3, \dots, 10\}$. Sia $K \in \{2, \dots, 10\}$

$$p(k) = P(X=k)$$

Sia Ω l'insieme delle disposizioni senza ripetizione di due oggetti scelti da $\{1, \dots, 10\}$. $|\Omega| = 10 \cdot 9 = 90$

$$|\{X=k\}| = |\{K \text{ alla } 1^a, < K \text{ alla } 2^a\}| + |\{K \text{ alla } 2^a, < K \text{ alla } 1^a\}| = 2K-2$$

$$p(k) = \frac{2K-2}{90}$$

Esempio 3 n° di prove fino al 1° successo.

Immagina di $X: \{1, 2, \dots\}$. Sia $K \geq 1$

$$P(X=K) = (1-p)^{K-1} p$$

Esempio 4 $X =$ n° di successi in n prove

Immagina di $X: \{0, 1, \dots, n\}$. Se $K \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$P(K) = P(X=K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$$

Esempio 5 Strategia del raddoppio.

Immagine di X ?

n° ripetizione	Eno puntati	Eno vinti	X
1	1	1	1
2	2	2	$2 - 1 = 1$
3	4	4	$4 - 2 - 1 = 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
n	2^{n-1}	2^{n-1}	$2^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-2} 2^i = \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} - 1$$

$$\sum_{i=0}^K a^i = \frac{a^{K+1} - 1}{a - 1}$$

Se pendo 10 volte, pendo $2^{10} - 1 = 1023$ e quindi ho finito i soldi.

In questo caso $X = -1023$

Immagine di $X: \{-1023, 1\}$

$$p(-1023) = P(X=-1023) = \left(\frac{19}{37}\right)^{10}$$

$$p(1) = 1 - p(-1023) = 1 - \left(\frac{19}{37}\right)^{10}$$