

$\Omega$  spazio campionario con una probabilità  $P$

Ogni funzione  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  si dice variabile aleatoria

Se l'immagine di  $X$  è finita o numerabile diciamo che  $X$  è discreta. In tal caso definiamo la massima densità (discreta):  $x \in \mathbb{R}$

$$p(x) = P(X=x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega)=x\})$$

Ovviamente se  $x$  non è nell'immagine di  $X$  allora  $p(x)=0$

Proposizione Sia  $X$  una v.e. discreta, e  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

l'immagine di  $X$ . Allora  $\sum_i p(x_i) = 1$

(Talvolta scriviamo  $\sum_x p(x) = 1$ )

Dim  $\Omega = \bigcup_i \{X = x_i\}$ . Se  $i \neq j$  ( $x_i \neq x_j$ ) allora

$\{X = x_i\} \cap \{X = x_j\} = \emptyset$ . Quindi per l'additività di  $P$

$$1 = P(\Omega) = \sum_i P(X = x_i)$$

Definizione Sia  $X$  una v.v. discreta, con immagine

$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ . Si dice valore medio di  $X$  la  
quantità (se esiste)

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i) \quad \left( = \sum_x x p(x) \right)$$

Supponiamo di ripetere molte volte un esperimento  
aleatorio e sia  $X_k$  il valore della variabile  $X$   
nella  $k$ -esima ripetizione dell'esperimento.

Per l'interpretazione frequentista delle probab., se  $x \in \mathcal{R}$

$$P(X=x) \simeq \frac{|\{k \leq n : X_k = x\}|}{n} = \frac{n(x)}{n} \Rightarrow n(x) \simeq n P(X=x)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k &= \frac{1}{n} (x_1 n(x_1) + x_2 n(x_2) + \dots) \simeq x_1 P(X=x_1) + x_2 P(X=x_2) + \dots \\ &= E(X) \end{aligned}$$

Example Sia  $X$  una v.e. che assume i valori 0 e 1

$$P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{2} \quad \text{cioè} \quad p(0) = \frac{1}{2} = p(1)$$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Note In generale  $E(X)$  è compreso fra il minimo e il massimo degli elementi dell'immagine, ma non necessariamente è un elemento dell'immagine di  $X$ .

Esempio Bilancio sulle strategie del raddoppio  
alla roulette.

$X$  assume i valori  $1, -1023$

$$p(-1023) = \left(\frac{19}{37}\right)^{10} \quad p(1) = 1 - \left(\frac{19}{37}\right)^{10}$$

$$E(X) = -1023 \left(\frac{19}{37}\right)^{10} + 1 \cdot \left(1 - \left(\frac{19}{37}\right)^{10}\right) \quad \text{Vediamo: } 1023 = 2^{10} - 1$$

$$E(X) = -2^{10} \left(\frac{19}{37}\right)^{10} + \left(\frac{19}{37}\right)^{10} + 1 - \left(\frac{19}{37}\right)^{10} = -\left(\frac{38}{37}\right)^{10} + 1 < 0$$

## Proprietà del valore medio

Siano  $X$  e  $Y$  due v.a. che dipendono dallo stesso esperimento aleatorio, cioè  $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , e siano  $a, b \in \mathbb{R}$ . Possiamo definire

$$aX + b: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (aX + b)(\omega) = aX(\omega) + b$$

$$X + Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$$

Allora: 1)  $E(aX + b) = aE(X) + b$

2)  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Dimostriamo, per esercizio, la 1) Supponiamo, per ora,  $a \neq 0$

Sia  $\{x_1, x_2, \dots\}$  l'immagine di  $X$

l'immagine di  $aX+b$  è  $\{ax_1+b, ax_2+b, \dots, ax_n+b, \dots\}$

$$P(aX+b = ax_i+b) = P(X=x_i) = p(x_i)$$

$$\text{Quindi } E(aX+b) = \sum_i (ax_i+b) P(aX+b = ax_i+b) = \sum_i (ax_i+b) p(x_i)$$

$$= a \sum_i x_i p(x_i) + b \sum_i p(x_i) = a E(X) + b$$



Se  $a=0$ ,  $aX+b$  assume solo il valore  $b$  (con prob. 1)

e quindi  $E(aX+b) = b \cdot 1 = aE(X) + b$

---

Example In uno schema di prove ripetute indipendenti con probab. di successo  $p$ , sia  $X$  il n° di successi in  $n$  prove. Troviamo  $E(X)$

Definiamo, per  $i=1, \dots, n$ , le variabili aleatorie

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'i-ma para è un successo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n \Rightarrow E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

$$P(X_i=1) = p \quad P(X_i=0) = 1-p \Rightarrow E(X_i) = 1 \cdot P(X_i=1) + 0 \cdot P(X_i=0) = p$$

$$\text{Quindi } E(X) = np$$

## Funzioni di variabili aleatorie

Sia  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una data v.a.

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un'arbitraria funzione. Definiamo

$g(X): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $g(X)(\omega) = g(X(\omega))$