

Sia X una v. a. discreta, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Definiamo
la v. a. $Y = g(X)$

Denotiamo con $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ l'immagine di X
e con $\{y_1, y_2, \dots, y_m, \dots\}$ l'immagine di Y

Notare che deve essere, per ogni y_m nell'imm. di Y ,
 $y_m = g(x_n)$ per almeno un x_n nell'imm. di X

$$P(Y = y_m) = P(g(X) = y_m) = P\left(\underbrace{\bigcup_{n: g(x_n) = y_m} \{X = x_n\}}_{\text{unione disgiunta}}\right) = \sum_{n: g(x_n) = y_m} P(X = x_n)$$

Denotiamo con P_X e P_Y le densità di X e Y rispettivamente. Abbiamo visto che

$$P_Y(y_m) = \sum_{n: g(x_n) = y_m} P_X(x_n) \quad \text{Quindi:}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_m y_m P_Y(y_m) = \sum_m y_m \sum_{n: g(x_n) = y_m} P_X(x_n) = \\ &= \sum_m \sum_{n: g(x_n) = y_m} y_m P_X(x_n) = \sum_m \sum_{n: g(x_n) = y_m} g(x_n) P_X(x_n) = \\ &= \sum_n g(x_n) P_X(x_n) \end{aligned}$$

In conclusione: $E(g(X)) = \sum_n g(x_n) P_X(x_n)$

Definizione Sia X una v.a. discreta, e sia

$\mu = E(X)$. Si dice varianza di X la quantità

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= \sum_n (x_n - \mu)^2 P_X(x_n) \end{aligned}$$

Proposizione $\text{Var}(X) \geq 0$ e $\text{Var}(X) = 0$ se e solo

se X assume un solo valore, cioè è costante.

Proprietà della varianza

$$1) \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$2) \text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

Dimostrazione 1) $\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] =$

$$= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Classi notevoli di v.a. discrete

1) V.a. di Bernoulli o Bernoulliane

Si tratta delle v.a. che assumono solo i valori 0 e 1.

Per caratterizzare la densità basta assegnare

$$P(X=1)=p \quad \text{e quindi} \quad P(X=0)=1-p$$

dove $p \in [0,1]$. Una tale v.a. è chiamata
Bernoulliana di parametro p , e scriviamo

$$X \sim \text{Be}(p)$$

$$\begin{aligned} E(X) &= p & E(X^2) &= 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p & \text{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ & & & & &= p - p^2 = p(1-p) \end{aligned}$$

Variabili aleatorie Binomiali

In uno schema di n prove ripetute indipendenti
sia X il numero di successi.

Già sappiamo che la densità di X è, per $K=0,1,\dots,n$

$$P(K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$$

dove $p \in [0,1]$ è la prob. di successo di una singola
prova.

Una v.a. X con tale densità si dice Binomiale di parametri n e p , e scriviamo

$$X \sim B(n, p)$$

Nota $B(1, p) = Be(p)$

Già sappiamo (vedi lezione di ieri) che

$$E(X) = np$$

Facciamo un calcolo più formale. Sia $m \geq 0$

$$E(X^m) = \sum_{k=0}^m k^m p(k) = \sum_{k=0}^m k^m \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^m k^m \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^m k^{m-1} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$(h = k-1) = \sum_{h=0}^{m-1} (h+1)^{m-1} \frac{n!}{h!(n-1-h)!} p^h p (1-p)^{n-1-h}$$

$$= n p \sum_{h=0}^{m-1} (h+1)^{m-1} \underbrace{\binom{n-1}{h} p^h (1-p)^{n-1-h}}_{\text{densità di una } B(n-1, p)}$$

$$= np E[(Y+1)^{m-1}] \quad \text{dove } Y \sim B(n-1, p)$$

$$\parallel$$

$$E(X^m) \qquad X \sim B(n, p)$$

Se $m=1$ abbiamo $E(X) = np$

Se $m=2$: $E(X^2) = np E[Y+1] = np(E(Y) + 1)$

$$= np((n-1)p + 1) = np + n(n-1)p^2$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = np + \cancel{n^2 p^2} - np^2 - \cancel{n^2 p^2} = np(1-p)$$

