

PROCESSO DI POISSON

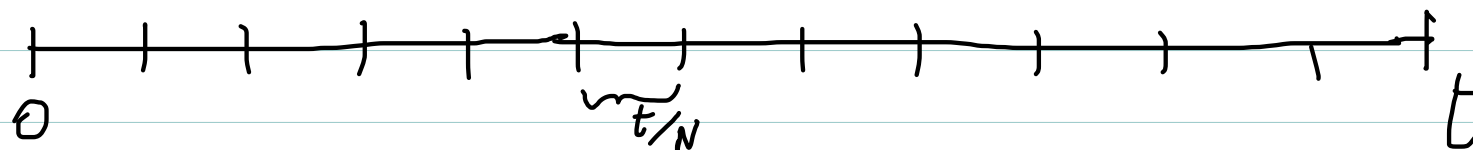
N_t = n° di occorrenze fra 0 e t

Ipotesi 1 $P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + o(h)$ con $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$
dove $\lambda > 0$

Ipotesi 2 $P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h)$

Ipotesi 3 Siano $I_1, I_2, \dots, I_m$ intervalli di tempo disgiunti
e sia A_i l'evento: "nell'intervallo I_i si è verificata almeno
un'occorrenza".

Gli eventi $A_1, A_2, \dots, A_m$ sono indipendenti.



N intervallini di ampiezza t/N , chiamiamoli $I_1, I_2, \dots, I_N$

Poiché per l'ipotesi 2 possiamo trascurare l'eventualità di avere più di un'occorrenza in qualche intervallino ($N \gg 1$), e poiché il fatto che ci sia un'occorrenza in un certo intervallino è indipendente da ciò che avviene negli altri (Ipotesi 3)

Allora N_t è il numero di successi in uno schema di N prove ripetute indipendenti, in cui la prob. di successo è la probab. di osservare un'occorrenza in un intervallo fisso, che è circa (Ipotesi 1)

$p = \lambda \frac{t}{N}$. N_t è approssimativamente $B(N, \frac{\lambda t}{N})$

Mandando $N \rightarrow \infty$ si trova $N_t \sim \text{Po}(\lambda t)$

λ si dice intensità del Processo di Poisson, ed ha la dimensione tempo^{-1}

Esercizio In un negozio i clienti arrivano secondo un processo di Poisson, e in media arriva un cliente ogni due minuti.

a) Qual è la probab. che oggi fra le 12:00 e le 12:05 non arrivi alcun cliente?

b) Qual è la prob. che nello stesso intervallo arrivino 3 o più clienti?

$$E(N_2) = 1, \quad E(N_2) = \lambda \cdot 2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$a) N_5 \sim P_0\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$P(N_5=0) = e^{-\frac{5}{2}}$$

$$b) P(N_5 \geq 3) = 1 - P(N_5=0) - P(N_5=1) - P(N_5=2) =$$

$$= 1 - e^{-\frac{5}{2}} - e^{-\frac{5}{2}} \frac{5}{2} - e^{-\frac{5}{2}} \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{2}$$

VARIABILI ALEATORIE GEOMETRICHE

Si consideri uno schema di prove ripetute indipendenti
e sia X il numero di prove eseguite
per ottenere il primo successo

$\{X=m\} = \text{"le prime } m-1 \text{ prove sono insuccessi e l'} m\text{-ma è un successo"}$

$P(X=m) = (1-p)^{m-1} p \quad m=1,2,\dots$. Una v.a. con questa
densità si dice geometrica di parametro p e scriviamo $X \sim \text{ge}(p)$

Ricordiamo la serie geometrica: se $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

In particolare $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} \cdot p =$

$$\stackrel{k=n-1}{=} p \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

Sei $X \sim \text{ge}(p)$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n P(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n (1-p)^{n-1} p$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1+1) (1-p)^{n-1} p = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) (1-p)^{n-1} p + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} p}_{=1}$$

$$\stackrel{k=n-1}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} k (1-p)^k p + 1 = (1-p) \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} k (1-p)^{k-1} p}_{E(X)} + 1$$

$$\text{h'oe } E(X) = (1-p) E(X) + 1 \Rightarrow E(X) = \frac{1}{p}$$

Il problema del collezionista di figurine

Dobbiamo completare un album di n figurine.

- Acquistiamo una figurina alla volta.
- Ogni figurina acquistata è una delle n dell'album con la stessa probabilità, indipendentemente dagli acquisti precedenti.

Sia X il n° di acquisti necessari a completare l'album.
Quanto vale $E(X)$?

Poniamo $X_1 = 1$

X_2 = n° di acquisti necessari, successivi al primo, a trovare una seconda figurina

$$X_2 \sim \text{ge} \left(\frac{n-1}{n} \right)$$

X_{k+1} = n° di acquisti, successivi all'acquisto della k-ma figurina distinta, necessari a trovare la k+1-ma.

$$X_{k+1} \sim \text{ge} \left(\frac{n-k}{n} \right)$$

Noten che $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{m-1} + X_m$

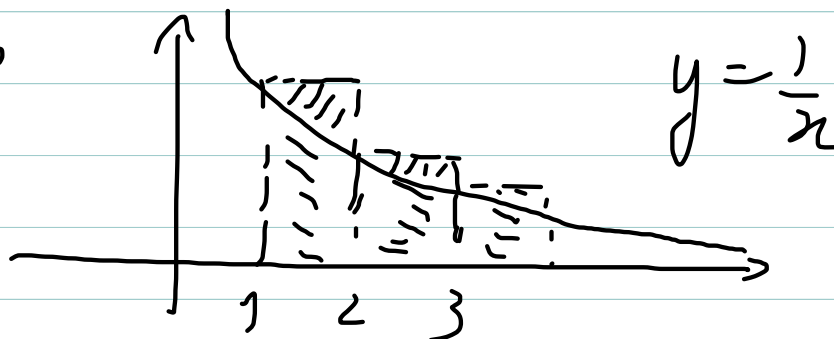
$$E(X) = 1 + E(X_2) + \dots + E(X_m)$$

$$X_{k+1} \sim \text{ge} \left(\frac{m-k}{m} \right)$$

$$E(X) = 1 + \frac{m}{m-1} + \frac{m}{m-2} + \dots + \frac{m}{2} + m$$

$$= m \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} \right) = m \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx \int_1^n \frac{1}{x} dx = \log n$$



In realtà $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + \gamma + \frac{1}{n} + \dots$ (termini trascurabili)

$$\gamma \approx 0.577$$

$$\Rightarrow E(X) = n \underline{\log n} + \text{termini di ordine inferiore per } n \text{ grande}$$