

AVVISO: LE LEZIONI DEL 18 e 19 APRILE NON AVRANNO LUOGO.

$X \sim \text{ge}(p)$ significa $P(X=n) = p(1-p)^{n-1} \quad n \geq 1$

dove $p \in (0, 1)$. Abbiamo visto che $E(X) = \frac{1}{p}$

$$\begin{aligned} \text{Calcolo } E(X^2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 P(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 p(1-p)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1+1)^2 p(1-p)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)^2 p(1-p)^{n-1} + 2 \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) p(1-p)^{n-1}}_{E(X) - 1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}}_{=1} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k^2 p (1-p)^k + 2 \left(\frac{1}{p} - 1 \right) + 1 = (1-p) \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p (1-p)^{k-1}}_{E(X^2)} + \frac{2}{p} - 1$$

Quindi: $E(X^2) = (1-p)E(X^2) + \frac{2}{p} - 1$

$$p E(X^2) = \frac{2}{p} - 1 \Rightarrow E(X^2) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$$

Proprietà di "perdita di memoria" delle v.a. geometriche

Teorema sia $X \sim \text{ge}(p)$ e $n, k \geq 1$

$$P(X > n+k | X > n) = (1-p)^k = P(X > k)$$

Dim
$$P(X > n+k | X > n) = \frac{P(\{X > n+k\} \cap \{X > n\})}{P(X > n)} = \frac{P(X > n+k)}{P(X > n)}$$

poiché $\{X > n+k\} \subseteq \{X > n\}$

$$P(X > m) = \sum_{n=m+1}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=m+1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}$$

$$\stackrel{h=n-m}{=} \sum_{h=1}^{+\infty} p(1-p)^{h-1+m} = (1-p)^m \underbrace{\sum_{h=1}^{+\infty} p(1-p)^{h-1}}_{=1} = (1-p)^m$$

$$P(X > m+k | X > m) = \frac{P(X > m+k)}{P(X > m)} = \frac{(1-p)^{m+k}}{(1-p)^m} = (1-p)^k = P(X > k)$$

Variabili aleatorie Binomiali negative.

In uno schema di prove ripetute indipendenti con prob. di successo p . Sia X il n° di prove necessarie a ottenere r successi, dove $r \geq 1$.

Se $r=1$, $X \sim Ge(p)$. Assumiamo $r > 1$.

Calcoliamo, $\forall n \geq r$, $P(X=n)$

eventi indipendenti
 $\{X=n\} = \{n\text{-mo tentativo è un successo}\} \cap \{ \text{nei primi } n-1 \text{ tentativi} \}$
 $\{ \text{si ottengono } r-1 \text{ successi} \}$

$$P(X=n) = P \binom{n-1}{z-1} p^{z-1} (1-p)^{n-z} = \binom{n-1}{z-1} p^z (1-p)^{n-z}$$

Si può mostrare, lo faremo più avanti, che

$$E(X) = \frac{z}{p} \quad \text{Var}(X) = z \frac{1-p}{p^2}$$

Estrazioni senza rimmissione

Un urna contiene N palline, numerate da 1 a N .
Effettuiamo N estrazioni senza rimmissione.

Per $i = 1, \dots, N$, sia X_i il numero che compare
nell' i -esima pallina estratta.

Se $j = 1, \dots, N$, quanto vale $P(X_i = j)$?

Sia Ω l'insieme delle permutazioni di $\{1, 2, \dots, N\}$

$$\Omega \ni w = (w(1), w(2), \dots, w(N))$$

Sia P la probab. a enti equiprobabili

$$X_i(w) = w(i)$$

$$P(X_i = j) = P(\{w : w(i) = j\}) = \frac{|\{w : w(i) = j\}|}{|\Omega|} = \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}$$

Piu in generale, se $1 \leq m \leq N$

$$P(X_i \leq m) = \frac{m}{N}$$

Supponiamo che le palline numerate da 1 a m siano rosse, le altre nere.

Sia X il n° di palline rosse estratte in $n \leq N$ estrazioni (senza rimpiazzare). Qual è la densità di X ?

$$\text{Sia } Y_i = \begin{cases} 1 & \text{se } X_i \leq m \\ 0 & \text{altimenti} \end{cases}$$

$$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$