

Un'urna, m palline rosse, $N-m$ nere. Le palline rosse sono numerate da 1 a m , le nere da $m+1$ a N .
 $X = n^\circ$ di palline estratte in n estrazioni senza reimmissione.

$X_i = n^\circ$ delle palline estratte alla i -ma estrazione.

$$P(X_i = j) = \frac{1}{N} \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$

Definite $Y_i = \begin{cases} 1 & \text{se } X_i \leq m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$Y_i \sim \text{Be}\left(\frac{m}{N}\right), \quad X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \Rightarrow E(X) = \frac{n m}{N}$$

Qual è la densità di X ?

Usiamo le combinazioni di m oggetti scelti fra $\{1, 2, \dots, N\}$. Quindi ho $\binom{N}{m}$ esiti possibili, tutti equiprobabili.

$|\{X=k\}| = ?$. Gli elementi di $\{X=k\}$ si possono identificare con la seguente sequenza di scelte:

- 1) Scegli k peline rosse: $\binom{m}{k}$ modi possibili
- 2) " $m-k$ peline nere: $\binom{N-m}{m-k}$ modi possibili

$$k \geq 0, k \leq m, k \leq m, m-k \leq N-m \Rightarrow k \geq m - N + m$$

$$|\{X=k\}| = \binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}$$

$$\Rightarrow P(X=k) = \frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Variabili aleatorie con questa densità si dicono

ipergeometriche

Esercizio Un gruppo di 100 componenti elettronici ne contiene 6 di difetti e 94 funzionanti. Supponiamo di controllarne a caso 10, e sia X il numero di componenti difetti trovati. Calcolare: a) $E(X)$
b) $P(X=0)$ c) $P(X>2)$

X è una v.a. ipergeometrica $P(X=k) = \frac{\binom{6}{k} \binom{94}{10-k}}{\binom{100}{10}} \quad k=0, \dots, 6$

a) $E(X) = 10 \cdot \frac{6}{100} = 0.6$. b) $P(X=0) = \frac{\binom{94}{10}}{\binom{100}{10}}$

c) $P(X>2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) = \dots$

Esercizio Una moneta equilibrata viene lanciata fino a quando la "testa" non compaia per la 10^a volta. Sia X il numero di croci ottenute nei lanci eseguiti. Determinare la densità e la media di X .

Sia Y il n° di lanci eseguiti. Allora Y è una binomiale negativa di parametri $z = 10$, $p = \frac{1}{2}$.

Quindi
$$P(Y=n) = \binom{n-1}{z-1} p^z (1-p)^{n-z} = \binom{n-1}{9} \frac{1}{2^n}$$

e
$$E(Y) = \frac{z}{p} = 20$$

$$X = Y - 10 \Rightarrow E(X) = E(Y) - 10 = 10$$

$$\underline{P(X = k) = P(Y = k + 10) = \binom{k+9}{9} \frac{1}{2^{k+10}}}$$

Esercizio Un cliente di un casinò continua a scommettere 5 Euro sul rosso alla roulette continuando a giocare finché non vince 4 volte.

- a) Qual è la probabilità che in totale giochi 9 volte?
b) Qual è la sua vincita media quando smette di giocare?

a) $X = \text{n° di giocate}$. X è una binomiale negativa di parametri $z = 4$, $p = \frac{18}{37}$

$$P(X=9) = \binom{8}{3} \left(\frac{18}{37}\right)^4 \left(\frac{19}{37}\right)^5$$

b) Se Y denota la vincita

$$Y = 4 \cdot 5 - (X-4) \cdot 5 = 40 - 5X$$

$$E(Y) = 40 - 5E(X) = 40 - 5 \cdot 4 \frac{18}{37} = 40 - 20 \cdot \frac{37}{18} < 0$$

Esercizio. Un'urna contiene m palline rosse e $N-m$ nere. Estraggo, una alla volta, tutte le palline una alla volta. Sia X il numero di estrazioni necessarie ad ottenere la prima pallina rossa. Determinare la densità di X .

X assume valori tra 1 e $N-m+1$. Sia k un tale valore
 $P(X=k) = ?$ Usiamo le notazioni già viste

$$\{X=k\} = \{Y_1=0, Y_2=0, \dots, Y_{k-1}=0, Y_k=1\}$$

$$P(X=k) = P(Y_1=0, \dots, Y_{k-1}=0, Y_k=1) =$$

$$= \underbrace{P(Y_k=1 \mid Y_1=0, \dots, Y_{k-1}=0)}_m P(Y_1=0, \dots, Y_{k-1}=0)$$

$$= \frac{m}{N-k+1}$$

$$P(Y_1=0, \dots, Y_{k-1}=0) = P(\overbrace{Y_1 + \dots + Y_{k-1} = 0}^{\text{independent}}) = \frac{\binom{m}{0} \binom{N-m}{k-1}}{\binom{N}{k-1}} = \frac{\binom{N-m}{k-1}}{\binom{N}{k-1}}$$

$$\Rightarrow P(X=k) = \frac{m}{N-k+1} \cdot \frac{\binom{N-m}{k-1}}{\binom{N}{k-1}}$$

Soluzione alternativa

$$\{X=k\} = \{X>k-1\} \setminus \{X>k\}$$

$$\Rightarrow P(X=k) = P(X>k-1) - P(X>k)$$

$\{X>k\}$ = "le prime k palline estratte sono nere"

$$P(X>k) = \frac{\binom{N-m}{k}}{\binom{N}{k}}$$

$$\text{Allora } P(X=k) = \frac{\binom{N-m}{k-1}}{\binom{N}{k-1}} - \frac{\binom{N-m}{k}}{\binom{N}{k}}$$