ESERCIZI - FASCICOLO 4

Esercizio 1. È noto che la probabilità che un uomo sia daltonico è del 7%, mentre la probabilità che una donna sia daltonica è solo dello 0.5%. Considerato un gruppo di 30 persone costituito da 10 uomini e 20 donne scelti a caso:
(a) Qual è la probabilità che nel gruppo non ci siano persone daltoniche?
(b) Qual è la probabilità che nel gruppo ci siano esattamente un uomo daltonico e nessuna donna daltonica?
(c) Indichiamo con Z il numero totale di persone daltoniche del gruppo. Qual è il valor medio di Z?
(d) Scelta a caso una persona nel gruppo, qual è la probabilità che sia un uomo sapendo che si tratta di una persona daltonica?

Soluzione 1. Sia X il numero di uomini daltonici del gruppo, e Y quello di donne daltoniche. Data la casualità della scelta degli elementi del gruppo, ogni uomo è daltonico con probabilità 0.07 indipendentemente dagli altri elementi del gruppo, così come ogni donna lo è con probabilità 0.005. Ne segue che $X \sim B(10, 0.07)$, $Y \sim B(20, 0.005)$ e, per ogni h, k, gli eventi $\{X = h\}$ e $\{Y = k\}$ sono indipendenti.
(a)

$$P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) = (1 - 0.005)^{20} \cdot (1 - 0.07)^{10} \simeq 0.4378.$$

(b) La probabilità che nel gruppo ci siano esattamente un uomo daltonico e nessuna donna daltonica è $P(X = 0, Y = 1)$.

$$\begin{aligned}
&P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0) \cdot P(Y = 1) \\
&P(X = 0) = \binom{20}{0} \cdot (1 - 0.005)^{20} = 0.9046 \\
&P(Y = 1) = \binom{10}{1} \cdot (1 - 0.07)^{9} \cdot 0.07^{1} = 0.3643 \\
&P(X = 0, Y = 1) \simeq 0.33
\end{aligned}$$

(c) $E[Z] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 20 * 0.005 + 10 * 0.07 = 0.8$
(d) Denotiamo con F (risp. M) l'evento la persona scelta a caso è una donna (risp. un uomo), denotiamo con D l'evento si tratta di una persona daltonica. Dalle ipotesi si ha: $P(F) = \frac{2}{3}$, $P(M) = \frac{1}{3}$, $P(D|F) = 0.005$, $P(D|M) = 0.07$ Per calcolare $P(M|D)$ utilizziamo la formula di Bayes.

$$P(M|D) = \frac{P(D|M) \cdot P(M)}{P(D|M) \cdot P(M) + P(D|F) \cdot P(F)} = \frac{0.07 \cdot \frac{1}{3}}{0.07 \cdot \frac{1}{3} + 0.005 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{7}{8}$$

Esercizio 2. Consideriamo due mazzi di carte. Il primo mazzo (A) è costituito da 6 carte con i numeri $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mentre il secondo mazzo (B) è costituito da 8 carte con i numeri $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Scegliamo un mazzo a caso e estraiamo una carta a caso dal mazzo.
(a) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 2?
(b) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 10?

(c) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 4?
(d) Qual è la probabilità che la carta estratta sia minore (stretto) di 5?
(e) Sapendo che la carta estratta è un 3, qual è la probabilità che sia stata estratta dal mazzo A?
(f) Sapendo che la carta estratta è minore (stretto) di 5, qual è la probabilità che sia stata estratta dal mazzo A?
(g) Sia X_A il valore di una carta estratta a caso dal mazzo A. Quanto vale $\mathbb{E}[X_A]$?
(h) Sia X_B il valore di una carta estratta a caso dal mazzo B. Quanto vale $\mathbb{E}[X_B]$?
(i) Scegliamo un mazzo a caso ed estraiamo una carta a caso. Indichiamo con X il valore della carta. Quanto vale $\mathbb{E}[X]$?

Soluzione 2. (a) $\frac{1}{12}$, (b) $\frac{1}{16}$, (c) $\frac{7}{48}$, (d) $\frac{11}{24}$, (e) $\frac{4}{7}$, (f) $\frac{8}{11}$, (g) $\frac{7}{2}$, (h) $\frac{13}{2}$, (i) 5.

Esercizio 3. Si sceglie "a caso" un campione di 5 oggetti da un lotto di 100 di cui 10 sono difettosi per effettuare un controllo di qualità. Sia X il numero di oggetti difettosi contenuti nel campione. Si determini la densità discreta di X.

Soluzione 3. La variabile X assume solo i valori $0,1\ldots,5$. $X=k$ significa che nel lotto di 5 oggetti k sono difettosi. Possiamo calcolare $\mathrm{P}(X=k)$ con la formula "casi favorevoli su casi possibili" della probabilità uniforme. *Casi possibili*: ci sono $\binom{100}{5}$ modi di scegliere 5 oggetti tra 100. *Casi favorevoli*: devo scegliere 5 oggetti di cui k difettosi. Scelgo prima i k difettosi tra i 10 difettosi in $\binom{10}{k}$ modi, poi scelgo i rimanenti $5-k$ oggetti tra i rimanenti $100-10=90$ non difettosi in $\binom{90}{5-k}$ modi. In definitiva i casi favorevoli sono $\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}$ e quindi:

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}}{\binom{100}{5}}, \qquad k=0,1,\ldots,5\,.$$

Facendo un po' di conti si ottiene: $\mathrm{P}(X=0)\simeq 0.583$, $\mathrm{P}(X=1)\simeq 0.340$, $\mathrm{P}(X=2)\simeq 0.070$, $\mathrm{P}(X=3)\simeq 0.007$, $\mathrm{P}(X=4)\simeq \mathrm{P}(X=5)\simeq 0$. Per essere sicuri di non aver sbagliato i conti su può fare la verifica $\sum_{k=0}^{5}\mathrm{P}(X=k)=1$.

Esercizio 4. Un gioco a premi ha un montepremi di 512 euro. Vengono poste ad un concorrente 10 domande. Ad ogni risposta errata il montepremi viene dimezzato. Alla prima risposta esatta il concorrente vince il montepremi rimasto. Se non si dà alcuna risposta esatta non si vince nulla. Un certo concorrente risponde esattamente a ciascuna domanda con probabilità $p\in(0,1)$, indipendentemente dalle risposte alle altre domande. Sia X la vincita in euro di questo concorrente. Si determini la densità discreta p_X di X.

Soluzione 4. La variabile casuale X assume i valori $0,1,2,2^2,2^3,\ldots,2^9$. Per $0\le k\le 9$, il valore 2^{9-k} viene assunto se le prime k risposte sono errate, e la $k+1$-ma è corretta. Ciò avviene con probabilità $(1-p)^k p$. Infine il valore 0 viene assunto se tutte le 10 risposte sono sbagliate, il che avviene con probabilità $(1-p)^{10}$. Riassumendo

$$\mathrm{p}_X(2^{9-k})=p(1-p)^k$$

per $0\le k\le 9$, e $\mathrm{p}_X(0)=(1-p)^{10}$.

Esercizio 5. Un'urna contiene $n \geq 1$ palline bianche e 2 palline rosse. Si eseguono estrazioni ripetute *senza reimmissione*. Introduciamo la variabile aleatoria

$$X = \text{numero di palline bianche estratte prima di estrarre una pallina rossa,}$$

la cui densità discreta verrà indicata con $\mathrm{p}_X(k) = \mathrm{P}(X = k)$.

(i) Si mostri che, per $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$\mathrm{p}_X(k) = \frac{2}{(n+2)(n+1)}(n-k+1).$$

(ii) * Si calcoli la $\mathrm{E}(X)$.

Sugg. Usare le seguenti formule, che si dimostrano facilmente per induzione:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{0.1}$$

Soluzione 5. (i) Consideriamo gli eventi A = "la $k+1$-ma pallina estratta è rossa", B = "le prime k palline estratte sono tutte bianche". Si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X = k) &= \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B)\,\mathrm{P}(B) \\
&= \frac{2}{n-k+2} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+2}{k}} \\
&= \frac{2}{(n+2)(n+1)}(n-k+1),
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si sono eseguite le dovute semplificazioni.

(ii) Si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\,\mathrm{p}_X(k) = \frac{2}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^{n} k(n-k+1) \\
&= \frac{2}{n+2} \sum_{k=1}^{n} k - \frac{2}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{n(n+1)}{n+2} - \frac{n(2n+1)}{3(n+2)} = \frac{n}{3},
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato (0.1).

Esercizio 6. Un docente ha 70 studenti. Ogni volta che il docente fa ricevimento ciascuno studente può andarci o no, con probabilità p e $1-p$ rispettivamente. Supponiamo $p = 0.01$ e assumiamo che ciascuno studente scelga di andare o no a ricevimento in maniera indipendente dagli altri.

(a) Indicare qual è la distribuzione del numero di studenti che si presentano ad ogni ricevimento e calcolarne la media.

(b) Qual è la probabilità che ad un fissato ricevimento non si presenti nessuno studente?

(c) Nel corso dell'anno vi sono 50 ricevimenti. Sia T il numero di ricevimenti in cui non si presenta nessuno. Calcolare il valore medio e la varianza di T.

Soluzione 6. (a) Sia $n = 70$ il numero degli studenti e sia $p = 0.01$ la probabilità che uno studente vada a ricevimento un certo giorno. Fissato un giorno di ricevimento, sia X la variabile aleatoria che indica il numero totale di studenti presenti al ricevimento. Siano $Y_1, \dots, Y_{70}$ le variabili aleatorie a valori in $\{0,1\}$ così definite:

$$Y_i = \begin{cases} 1 \text{ Se l'}i\text{-esimo studente è andato a ricevimento} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

allora Y_i sono 70 v.a. indipendenti Bernoulliane di parametro $p = 0.01$ e $X = \sum_{i=1}^{70} Y_i$ ha distribuzione binomiale $X \sim Bin(n = 70, p = 0.01)$ e la sua media è data da $\mathbb{E}[X] = np = 0.7$.
(b) La probabilà cercata è

$$P(X=0) = \binom{70}{0}^0 \cdot p \cdot (1-p)^{70} = (0.99)^{70} \simeq 0.4948$$

Se avessimo deciso di stimare $P(X = 0)$ approssimando la X con una v.a. Y di Poisson avremmo avuto $Y \sim Po(0.7)$ e
$P(Y = 0) = e^{-0.7} \cdot \frac{0.7^0}{0!} \simeq 0.4965$.
(c) La probabilità che ad un fissato ricevimento non si presenti nessuno è $p_2 = 0.4948$ (calcolata nel punto (b)). Poiché vi sono in tutto 50 ricevimenti allora la v.a. T ha distribuzione binomiale $T \sim B(50, 0.4948)$.

$$\mathbb{E}[T] = 50 \cdot p_2 \simeq 24.74$$

$$Var[T] = 50 \cdot p_2 \cdot (1-p_2) \simeq 12.50$$

Esercizio 7. Nel 2008, in Veneto, sono stati celebrati 30000 matrimoni. Assumiamo che ciascun coniuge sia nato in un giorno a caso tra i 365 dell'anno (stiamo supponendo che nessuno sia nato il 29 febbraio). E supponiamo inoltre che tali eventi siano indipendenti.
(a) Calcolare il numero medio di coppie in cui entrambi i coniugi sono nati il 25 dicembre.
(b) Calcolare il numero medie di coppie che festeggiano il compleanno lo stesso giorno.

Soluzione 7. (a) Se fissiamo una data coppia, la probabilità che entrambi i coniugi siano nati il 25 dicembre è $\frac{1}{365^2}$. Ne segue che il numero di coppie in cui entrambi i coniugi sono nati il 25 dicembre è una variabile aleatorie binomiale X di parametri $n = 30000$ e $p = \frac{1}{365^2}$. Ne segue:

$$E(X) = np = \frac{30000}{365^2} \simeq 0.229$$

(b) Per $i = 1, \dots, 30000$, $j = 1, \dots, 365$, sia

$A_{i,j} =$ "entrambi i coniugi dell'i-esima coppia sono nati l'i-esimo giorno dell'anno".

Come nel punto (a), $P(A_{i,j}) = \frac{1}{365^2}$. L'evento $A_i =$ "la coppia i-esima festeggia il compleanno nello stesso giorno" è dato dalla seguente unione di eventi disgiunti

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{365} A_{i,j},$$

da cui

$$P(A_i) = \frac{1}{365}.$$

Si ha allora che il numero di coppie che festeggiano il compleanno lo stesso giorno è una variabile aleatoria binomiale Y di parametri $n = 30000$ e $p = \frac{1}{365}$. Ne segue:

$$E(Y) = np = \frac{30000}{365} \simeq 82.87.$$

Esercizio 8. Una ditta deve effettuare dei colloqui per assegnare posti di lavoro. Vengono convocate n persone in cerca di lavoro, al fine di verificare la loro idoneità verso quella particolare occupazione. Si assuma che ogni individuo, indipendentemente dagli altri, abbia probabilità $\frac{1}{20}$ di essere giudicato idoneo al lavoro. Sia X il numero di persone, fra le n sottoposte al colloquio, che risultano idonee.

(a) Si determini la densità discreta p_X di X.

(b) Qual è la probabilità che nessuno degli intervistati risulti idoneo? Per quali valori di n tale probabilità è minore di 0.01?

(c) Per quali valori di n il valor medio $E(X)$ è maggiore o uguale a 5?

Soluzione 8. (a) X è binomiale di parametri n e $1/20$.

(b) $P(X=0) = \left(\frac{19}{20}\right)^n$. Si ha che

$$P(X=0) < 0.01 \iff n \log\left(\frac{19}{20}\right) < \log(0.01) \iff n > \frac{\log(0.01)}{\log\left(\frac{19}{20}\right)} \simeq 89.78,$$

da cui $n \geq 90$.

(c) $E(X) = \frac{n}{20}$, e quindi $E(X) \geq 5$ se e solo se $n \geq 100$.

Esercizio 9. Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri $p = \frac{1}{2}$ e $n = 31$:
(a) Calcolare $E[2X+3]$.
(b) Calcolare $Var[2X+3]$.

Soluzione 9. È noto che $E(X) = \frac{31}{2}$ e $Var(X) = \frac{31}{4}$. Pertanto

$$E(2X+3) = 2E(X) + 3 = 34.$$

$$Var(2X+3) = 4Var(X) = 31.$$

Esercizio 10. In un'azienda agricola, si ritiene che la qualità dell'uva nel 2002 sarà ottima con probabilità 0.25 e buona con probabilità $0,55$. Se la qualità sarà ottima, il vino prodotto sarà venduto a 5 Euro a bottiglia; se la qualità sarà buona, il vino prodotto sarà venduto a 3 Euro a bottiglia; se la qualità sarà inferione a buona il vino prodotto sarà venduto a 1 Euro a bottiglia. Sia X il prezzo di una bottiglia di vino prodotto da quell'uva. Determinare la media e la varianza di X.

Soluzione 10. Sia ha:

$$P(X=5)=0.25,\ P(X=3)=0.55,\ P(X=1)=1-0.25-0.55=0.2.$$

Allora

$$E(X)=1\times 0.2+3\times 0.55+5\times 0.25=3.1$$

$$E(X^2)=1\times 0.2+9\times 0.55+25\times 0.25=11.4,$$

e quindi

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=1.79.$$

Esercizio 11. In un canale di trasmissione vengono trasmessi simboli binari. I disturbi sul canale fanno si che ogni simbolo trasmesso ha la probabilità del 2% di essere ricevuto errato, indipendentemente dagli altri simboli. I messaggi vengono trasmessi in "parole" composte da 50 simboli. Qual è la probabilità che una parola venga ricevuta con almeno due simboli errati? (Usare l'approssimazione di Poisson per una binomiale)

Soluzione 11. Sia Y il numero di simboli errati in una parola. Abbiamo che $Y \sim B(50,0.02)$, e dobbiamo calcolare $P(Y\geq 2)$. Usando l'approssimazione di Poisson, $Y \approx Po(1)$. Dunque

$$P(Y\geq 2)=1-P(Y=0)-P(Y=1)\simeq 1-2e^{-1}.$$

Esercizio 12. I semi di una pianta di piselli da giardino possono essere gialli o verdi. Un certo incrocio tra piante di piselli produce una progenie nel rapporto 3 gialli : 1 verde (cioè la probabilità che un seme prodotto sia giallo è $3/4$). Quattro semi così prodotti vengono scelti a caso.

a. Qual è la probabilità che tre siano gialli e uno verde?
b. Qual è la probabilità che siano tutti gialli?
c. Qual è la probabilità che siano tutti dello stesso colore?

Soluzione 12. Sia X il numero di semi gialli tra i quattro scelti. Si ha che $X \sim B(4,3/4)$. Pertanto:

a.
$$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\frac{1}{4}=0.421875$$

b.
$$P(X=4)=\left(\frac{3}{4}\right)^4=0.31640625$$

c.

$$P(X=0 \text{ oppure } X=4)=P(X=0)+P(X=4)=\left(\frac{1}{4}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^4=0.3203125$$

Esercizio 13. Il numero di auto al minuto che passano ad un certo casello autostradale ha distribuzione di Poisson. Il casellante mi dice che la probabilità che passino tre macchine è uguale alla probabilità che ne passino quattro. Quante auto passano, in media, al minuto?

Soluzione 13. Determiniamo il parametro della Poisson con l'equazione

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^4}{4!}$$

da cui $\lambda=4$. Perciò, in media, al minuto passano 4 auto.

Esercizio 14. Si sa che il numero di chiamate telefoniche che arrivano ad un centralino durante ogni periodo di 10 minuti è distribuito come un numero aleatorio con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda=2$.

a) Calcolare la probabilità che più di tre chiamate arrivino in un periodo di 10 minuti.

b) Calcolare la probabilità che non arrivino chiamate durante un periodo di 10 minuti.

Soluzione 14. Sia X il numero di chiamate.

a)

$$P(X>3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)=1-e^{-2}-2e^{-2}-2e^{-2}-\frac{4}{3}e^{-2}\simeq 0.143$$

b)

$$P(X=0)=e^{-2}\simeq 0.135$$

Esercizio 15. In un concorso vengono assegnate le idoneità per un dato servizio. Si assuma che ogni partecipante, indipendentemente dagli altri, abbia probabilità $p=1/3$ di ottenere l'idoneità. Al termine del concorso a 10 fra gli idonei viene assegnato un posto di lavoro (e se gli idonei sono meno di 10 vengono assegnati tanti posto di lavoro quanti sono gli idonei). Supponiamo che al concorso partecipino 15 persone e sia X il numero aleatorio dei partecipanti che ottengono l'idoneità ma non il posto di lavoro. Determinare la densità, la media e la varianza di X.

Soluzione 15.

$$P(X=1) = \binom{15}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{11}\left(\frac{2}{3}\right)^{4}$$
$$P(X=2) = \binom{15}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$$
$$P(X=3) = \binom{15}{13}\left(\frac{1}{3}\right)^{13}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$$
$$P(X=4) = \binom{15}{14}\left(\frac{1}{3}\right)^{14}\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$P(X=5) = \left(\frac{1}{3}\right)^{15}$$
$$P(X=0) = 1 - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4) - P(X=5)$$

Con pazienti calcoli si trova $E(X) \simeq 0.0021$, $Var(X) \simeq 0.0028$.

Esercizio 16. Un'urna contiene 10 dadi di cui uno solo truccato in modo da dare 1 con probabilità 1/2 e ognuno degli altri 5 risultati con probabilità 1/10. Gli altri 9 dadi sono equilibrati. Dall'urna viene estratto a caso un dado che è poi lanciato 3 volte. (Ogni dado ha la stessa probabilità di essere estratto.)

a) Calcolare la probabilità che i risultati siano due volte 1 e una volta sola 6.

b) Sia X il numero aleatorio che conta quanti dei tre lanci danno come risultato 1. Calcolare valor medio e varianza di X.

c) Calcolare la probabilità che il dado lanciato sia quello truccato sapendo che i tre lanci hanno dato due volte 1 e una volta sola 6.

Soluzione 16. a) Sia $A =$ " i risultati sono due volte 1 e una volta sola 6", e $B =$ "il dado scelto è truccato".

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) = 3\frac{1}{4}\frac{1}{10}\frac{1}{10} + 3\frac{1}{6^3}\frac{9}{10} = 0.02.$$

c)
$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = 0.375.$$

b) X assume i valori 0,1,2,3.

$$P(X = k|B) = \binom{3}{k}\frac{1}{2^3},$$

$$P(X = k|B^c) = \binom{3}{k}\frac{1}{6^k}\left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}$$

da cui
$$P(X = k) = \frac{1}{10}\binom{3}{k}\frac{1}{2^3} + \frac{9}{10}\binom{3}{k}\frac{1}{6^k}\left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}.$$

Perciò

$$E(X)=\sum_{k=0}^{3}kP(X=k)=\frac{1}{10}\sum_{k=0}^{3}k\binom{3}{k}\frac{1}{2^3}+\frac{9}{10}\sum_{k=0}^{3}k\binom{3}{k}\frac{1}{6^k}\left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}$$
$$=\frac{1}{10}\frac{3}{2}+\frac{9}{10}\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$$

Esercizio 17. Il numero di raffreddori che mi prendo in un anno è una variabile aleatorie di Poisson di parametro 5. Mi viene proposto un medicinale. Questo medicinale è del tutto inefficace per il 25% delle persone, mentre per il rimanente 75% è efficace; se risultasse efficace su di me, ridurrebbe il numero di raffreddori in un anno ad una variabile aleatoria di Poisson di parametro 3. Dopo un anno di uso del medicinale, ho avuto due raffreddori. Qual è la probabilità che sia stato merito della medicina?

Soluzione 17. Siano $A =$ ”prendo due raffreddori in un anno”, e $B =$ “la medicina è efficace su di me”. Sappiamo che

$$P(A|B)=e^{-3}\frac{3^2}{2}\quad P(A|B^c)=e^{-5}\frac{5^2}{2}\quad P(B)=0.75$$

Perciò

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|B^c)P(B^c)}\simeq 0.89.$$

Esercizio 18. Da un mazzo di 52 carte da Poker si estraggono, a caso, 4 carte.

(a) Qual è la probabilità che siano tutte di quadri?
(b) Qual è la probabilità che almeno una delle carte estratte sia di quadri?
(c) Qual è la probabilità che le carte estratte siano di 4 semi diversi, cioè una di quadri, una di cuori, una di picche e una di fiori?
(d) Se sappiamo che fra le carte estratte almeno una è di quadri, qual è la probabilità che le carte estratte siano di 4 semi diversi?
(e) * Sia X il numero di semi distinti che compaiono nelle 4 carte estratte. Si calcoli la densità discreta di X.

Soluzione 18. (a)

$$\frac{\binom{13}{4}}{\binom{52}{4}}$$

(b)

$$1-\frac{\binom{39}{4}}{\binom{52}{4}}$$

(c)

$$\frac{13^4}{\binom{52}{4}}$$

(d) Sia $A =$ “almeno una delle carte estratte è di quadri”, e $B =$ “le carte estratte sono di 4 semi diversi”. Osservando che $B \subseteq A$:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{13^4}{\binom{52}{4}}}{1 - \frac{\binom{39}{4}}{\binom{52}{4}}}$$

(e) * Abbiamo visto in (c) che $p_X(4) = \frac{13^4}{\binom{52}{4}}$. anche facile calcolare $p_X(1)$: infatti $X = 1$ significa che tutte le carte sono dello stesso seme. Per scegliere 4 carte dello stesso seme, si pu prima scegliere il seme (4 possibilità) e poi scegliere 4 carte del seme prescelto ($\binom{13}{4}$ possibilità). Dunque

$$p_X(1) = \frac{4 \cdot \binom{13}{4}}{\binom{52}{4}}.$$

Restano da calcolare $p_X(2)$ e $p_X(3)$. Basta calcolare $p_X(3)$, visto che

$$p_X(2) = 1 - p_X(1) - p_X(3) - p_X(4).$$

Gli esiti dell'evento $X = 3$ si possono ottenere come segue:

- si sceglie il seme cui appartengono 2 delle 4 carte (4 possibilità);
- si scelgono 2 carte di quel seme ($\binom{13}{2}$ possibilità);
- si scelgono altri due semi ($\binom{3}{2} = 3$ possibilità);
- si sceglie una carta per ognuno dei semi scelti (13^2 possibilità).

Dunque

$$p_X(3) = \frac{4 \cdot \binom{13}{2} \cdot 3 \cdot 13^2}{\binom{52}{4}}.$$

Esercizio 19. Si lanci tre volte una moneta equilibrata. Consideriamo gli eventi:

$A =$ "ottengo almeno una testa e almeno una croce"
$B =$ "ottengo almeno due teste"
$C =$ "ottengo una testa e due croci"

(a) Calcolare le probabilità di A, B e C.
(b) Calcolare $P(B|A)$ e $P(C|A)$.
(c) Ricordiamo che, dato un evento E, si può definire la variabile aleatoria

$$\mathbf{1}_E = \begin{cases} 1 & \text{se l'evento } E \text{ si verifica} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Consideriamo la variabile aleatoria $X = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C$. Si calcoli $E(X)$
(d) Si calcoli $Var(X)$

Soluzione 19. (a)

$$P(A) = P(1 \text{ testa e 2 croci}) + P(2 \text{ teste e 1 croce}) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$$

$$P(B) = P(2 \text{ teste e 1 croce}) + P(3 \text{ teste}) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{3}{8}$$

(b)

$$P(A \cap B) = P(\text{due teste e una croce}) = \frac{3}{8} \Rightarrow P(B|A) = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap C) = P(C) = \frac{3}{8} \Rightarrow P(C|A) = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

(c) Osservando che $\mathbf{1}_E$ è uan Bernoulliana di parametro $P(E)$, abbiamo

$$E(X) = E(\mathbf{1}_A) + E(\mathbf{1}_B) + E(\mathbf{1}_C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{13}{8}.$$

(d) Si noti che

$$X^2 = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C + 2\mathbf{1}_{A\cap B} + 2\mathbf{1}_{B\cap C} + 2\mathbf{1}_{A\cap C}.$$

Poiché $B \cap C = \emptyset$ abbiamo

$$E(X^2) = P(A) + P(B) + P(C) + 2P(A \cap B) + 2P(A \cap C) = \frac{25}{8}$$

da cui

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{25}{8} - \frac{169}{64} = \frac{31}{64}$$

Esercizio 20. In un gioco d'azzardo si vincono due Euro in caso di successo, e si perde un Euro in caso di insuccesso. La probabilità di successo è $p = 0.4$.

(a) Sia X il numero di successi in n ripetizioni del gioco. Qual è la densità di X?

(b) Sia Y il numero (relativo) di Euro vinti in n ripetizioni del gioco. Dopo aver determinato una relazione che lega X e Y, si determini media e varianza di Y.

(d) Quante volte, come minimo, è necessario ripetere il gioco affinché la probabilità di vincere almeno 50 Euro sia maggiore di 0.99?

Soluzione 20. (a) $X \sim B(n, p)$.

(b) $Y = 2X - (n - X) = 3X - n$, per cui

$$E(Y) = 3np - n = 0.2n$$

$$Var(Y) = 9Var(X) = 9np(1-p) = 2,16n$$