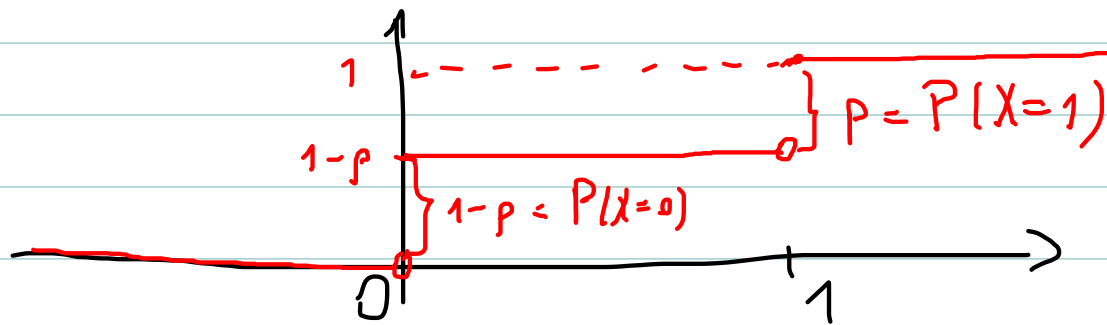


Funzione di ripartizione o di distribuzione

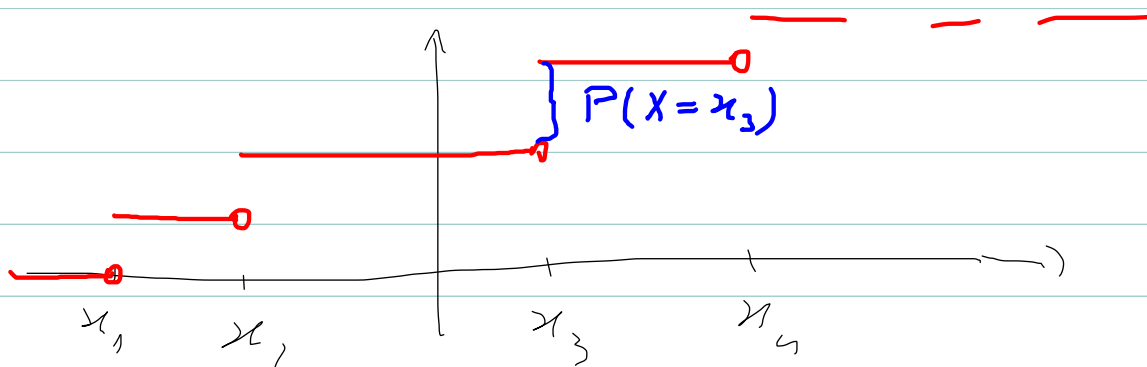
Sia X una v.a.. La sua funzione di ripartizione

$F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ è definita da: $F(x) = P(X \leq x)$

Esempio $X \sim \text{Be}(p)$. Troviamo F



In generale, per una v.e. X discreta, F ha grafico



Proprietà generali della funzione di ripartizione

1) F è crescente: $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$

(infatti $\{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\}$)

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

3) F è continua da destra: $\lim_{y \rightarrow x^+} F(y) = F(x)$

$$F(x) - \lim_{y \rightarrow x^-} F(y) = P(X=x)$$

Viceversa, vale la seguente affermazione: se $F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ che soddisfa 1), 2) e 3), allora esiste un esperimento aleatorio e, associata ad esso, una v.a. X la cui funzione di ripartizione è F

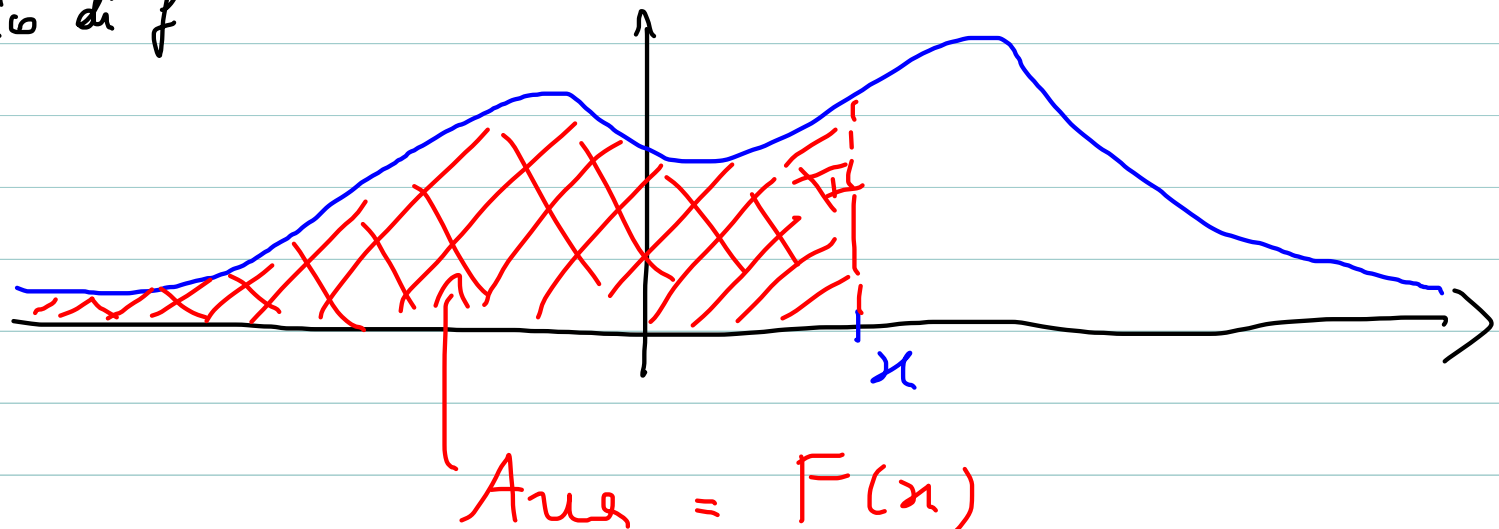
VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

Definizione Una v.a. X si dice continua se la sua funzione di ripartizione F ha la seguente proprietà: $\exists f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$

t.c.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1 \quad \text{e} \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

grafico di f



In particolare F è continua
La funzione f si dice densità della v.e. X

Notare (he, x $a < b$

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

$$= \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \text{Ma anche}$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) + \underbrace{P(X=a)}_0 = \int_a^b f(x) dx$$

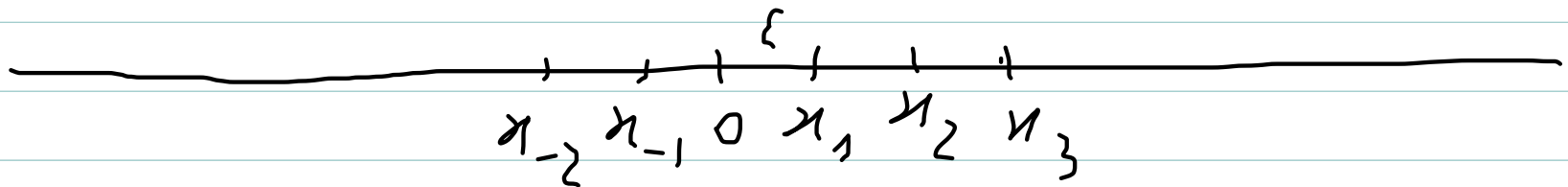
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \Rightarrow f(x) = F'(x) \text{ in tutte le } x \text{ in cui } f \text{ è continua}$$

In particolare, se F è una funzione di ripartizione continua, e che ammette derivate continue tranne al più in un insieme di punti isolati, allora F è la f. di ripartizione di una v.e. continua con densità

$$f(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{se } F'(x) \text{ esiste} \\ \text{qualsiasi cosa} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

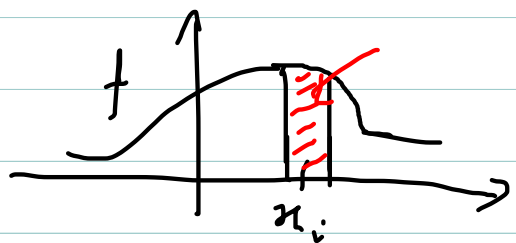
Valore medio di una v.e. continua

Sia X una v.e. continua con densità f
Sia $x_i = i\varepsilon$ dove $i \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon > 0$



Definiamo la v.e. discreta $Y = x_i$ se $x_{i-\frac{\varepsilon}{2}} \leq X < x_{i+\frac{\varepsilon}{2}}$

$$P(Y=x_i) = P(x_i - \frac{\epsilon}{2} \leq X < x_i + \frac{\epsilon}{2}) = \int_{x_i - \frac{\epsilon}{2}}^{x_i + \frac{\epsilon}{2}} f(t) dt$$



$$\approx \epsilon f(x_i) \quad (\epsilon \ll 1)$$

$$E(g(Y)) = \sum_i g(x_i) P(Y=x_i) = \epsilon \sum_i g(x_i) f(x_i) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

Tutto ciò che è "regionevole" definire

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

In particolare: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$