

Variabili aleatorie continue : caratterizzate da

$$F(x) := P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad \text{dove } f \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

f densità di X

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

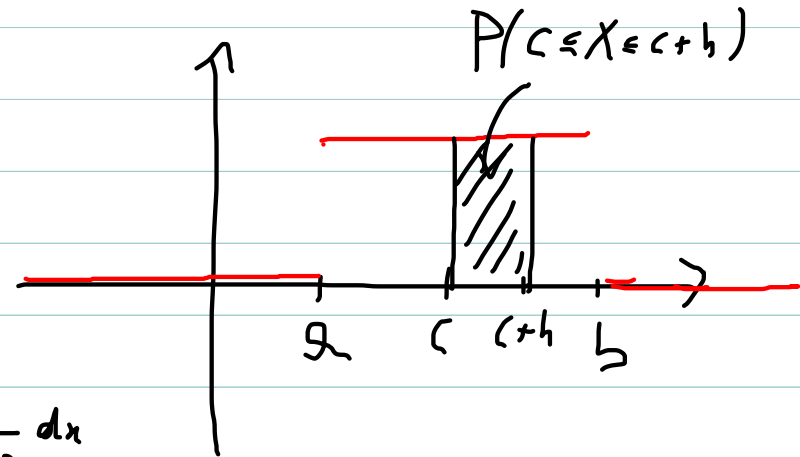
Se X è una v.a. la cui funzione di ripartizione F è continua e ammette derivata continua tranne al più in n° finito di punti allora X è una v.a. continua con densità $f(x) = F'(x)$

Variabili aleatorie uniformi

Sia $a < b$. Definiamo $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a} & \text{se } x \in [a, b] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot (b-a) = 1 \end{aligned}$$

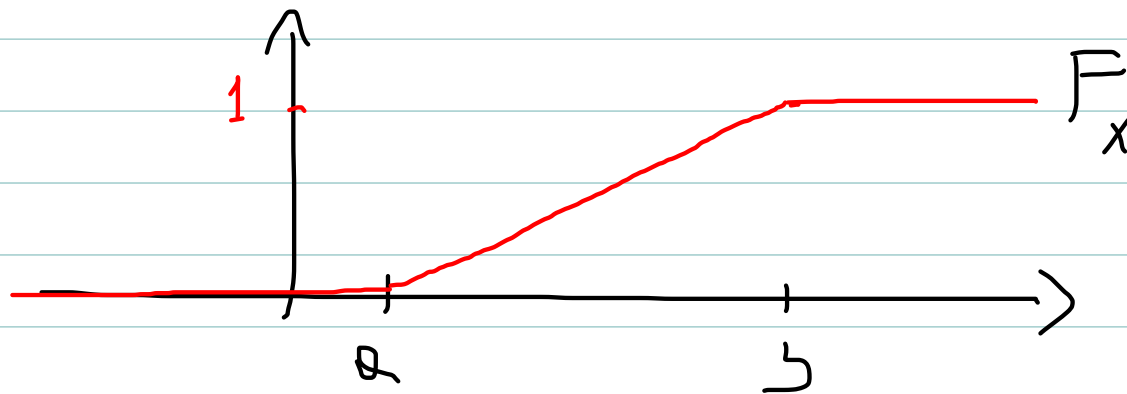


Una v.a. X con tale densità si dice uniforme in $[a, b]$ e scriviamo $X \sim U(a, b)$

Sia $X \sim U(a, b)$ $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ $Y = \alpha X + \beta$

Calcoliamo la funzione di ripartizione di X , F_X

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a < x < b \\ 1 & \text{se } x \geq b \end{cases}$$



$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\alpha X + \beta \leq x) = P\left(X \leq \frac{x - \beta}{\alpha}\right) = F_X\left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{x - \beta}{\alpha} \leq a \Leftrightarrow x \leq a\alpha + \beta \\ 1 & \text{se } \frac{x - \beta}{\alpha} \geq b \Leftrightarrow x \geq b\alpha + \beta \\ \frac{\frac{x - \beta}{\alpha} - a}{b - a} = \frac{x - a\alpha - \beta}{\alpha(b - a)} & \text{se } a\alpha + \beta < x < b\alpha + \beta \end{cases}$$

F_Y è continua e ammette derivata continua tranne in 2 punti

$\Rightarrow Y$ è una v.a. continua la cui densità è:

$$f_Y(x) = F_Y'(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \notin [a+\beta, b+\beta] \\ \frac{1}{\alpha(b-a)} & \text{if } x \in [a+\beta, b+\beta] \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y \sim U(a+\beta, b+\beta)$$

$$\text{Se } \alpha < 0 \text{ n' tiora } Y \sim U(b+\beta, a+\beta)$$

Sei $X \sim U(a, b)$. Definiamo $Y = \frac{X-a}{b-a}$

$$\text{cioè } \alpha = \frac{1}{b-a} \quad \beta = -\frac{a}{b-a} \quad \begin{aligned} \alpha a + \beta &= 0 \\ \alpha b + \beta &= 1 \end{aligned}$$

$$Y \sim U(0, 1) \quad X = (b-a)Y + a \Rightarrow \begin{aligned} E(X) &= (b-a)E(Y) + a \\ \text{Var}(X) &= (b-a)^2 \text{Var}(Y) \end{aligned}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x) dx = \int_0^1 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{b-a}{2} + a = \frac{a+b}{2}$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Y(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = (b-a)^2 \text{Var}(Y) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Scriviamo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Variabili aleatorie normali o gaussiane

Una v.a. si dice Normale o Gaussiana di parametri

$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ e la sua densità è

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Notare che $f(x) > 0$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad \text{cambio di variabili} \quad y = \frac{x-\mu}{\sigma}$$
$$dy = \frac{dx}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \stackrel{?}{=} 1 \quad \text{Sì!}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq x\right) = P(X \leq \mu + \sigma x) = F_X(\mu + \sigma x)$$

$\Rightarrow Y$ è una v.a. continua, con densità

$$f_Y(x) = F'_Y(x) = F'_X(\mu + \sigma x) \cdot \sigma = f_X(\mu + \sigma x) \cdot \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Cioè $Y \sim N(0, 1) = \text{Normale standard}$

$$X = \sigma Y + \mu$$