

Niente lezione domani 29 Aprile

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ significa X continua con densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Abbiamo visto che $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$. Quindi posto $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$$X = \mu + \sigma Z. \text{ Notare che } f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Sia $Z \sim N(0,1)$ ("normale standard")

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Z(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx$$

$$= -e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$Var(Z) = E(Z^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{d}{dx} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx \quad (\text{per parti})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\underbrace{-x e^{-\frac{x^2}{2}}}_{=0} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (-e^{-\frac{x^2}{2}}) dx \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(x) dx = 1$$

Poiché $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ è tale che $X = \mu + \sigma Z$

$$E(X) = \mu + \sigma E(Z) = \mu \quad \text{Var}(X) = \sigma^2 \text{Var}(Z) = \sigma^2$$

È anche possibile esprimere la funzione di ripartizione di una $N(\mu, \sigma^2)$ in termini della funzione di ripartizione di una $N(0, 1)$. La f. di ripartizione di una normale standard si denota con Φ

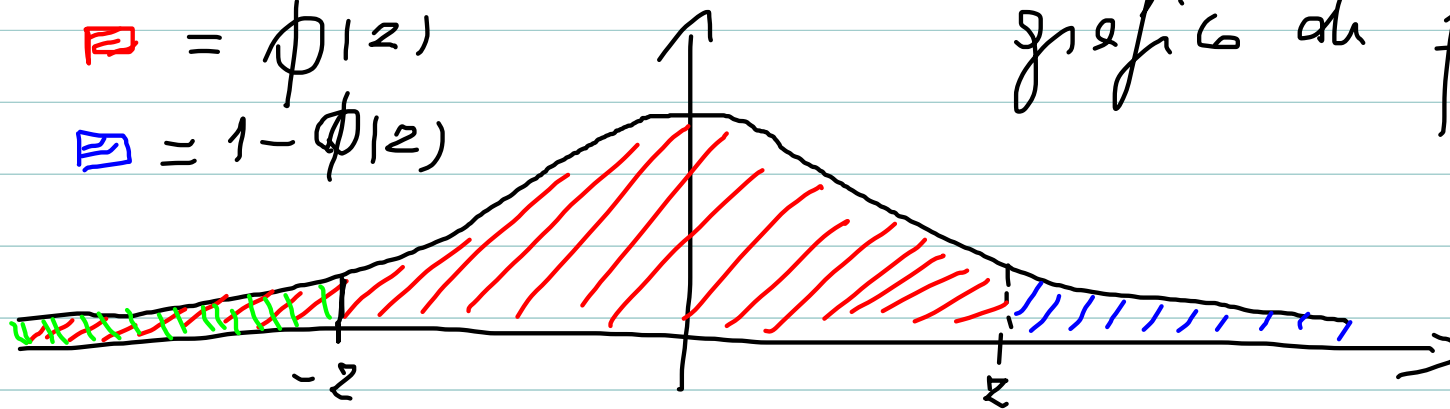
Sia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $F_X(x) = P(X \leq x) = P(\mu + \sigma Z \leq x)$

$= P(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

$\boxed{\text{red}} = \Phi(z)$

$\boxed{\text{blue}} = 1 - \Phi(z)$

grafico di f_Z



$\boxed{\text{green}} = \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

Esercizio In una popolazione l'altezza degli individui ha distribuzione normale con medio 170 cm e deviazione standard 10 cm.

a) Qual è la percentuale di popolazione la cui altezza è compresa fra 150 e 165 cm?

b) Qual è il valore x per cui esattamente il 5% della popolazione ha altezza $\geq x$?

Sia X l'altezza di un individuo scelto a caso nella popolazione.

$$X \sim N(170, 100)$$

$$a) X \sim N(170, 100) \quad P(150 \leq X \leq 165) = F_X(165) - F_X(150)$$

$$= \Phi\left(\frac{165-170}{10}\right) - \Phi\left(\frac{150-170}{10}\right) = \Phi(-0.5) - \Phi(-2)$$

$$= 1 - \Phi(0.5) - (1 - \Phi(2)) = \Phi(2) - \Phi(0.5) = 0.97725 - 0.69146$$

$$\approx 0.286$$

cioè il 28.6% della popolazione ha altezza tra 150 e 165 cm.

b) Dato trovare x t.c. $P(X \geq x) = 0.05$

$$P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x) = 1 - \Phi\left(\frac{x-170}{10}\right) = 0.05$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{x-170}{10}\right) = 0.95$$

- Trovo z t.c. $\Phi(z) = 0.95$
- Pongo $z = \frac{x-170}{10}$ e risolvo per x

$$\Phi(z) = 0.95 \Rightarrow z = \Phi^{-1}(0.95) = 1.64$$

$$\Rightarrow x = 10 \cdot 1.64 + 170 = 186.4$$

Consideriamo n prove ripetute indipendenti, con probabilità di successo p . Sia S_n il n° di successi

$$S_n \sim B(n, p) \text{ . Sia } Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Teorema (De Moivre, Laplace). Siano $a < b$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq Z_n \leq b) &= P(a \leq Z \leq b) \text{ dove } Z \sim N(0, 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(b) - \Phi(a) \end{aligned}$$