ESERCIZI - FASCICOLO 5

Esercizio 1. Da un urna con 10 pallina bianche e 15 palline nere, si eseguono estrazioni con reimmissione fino all'estrazione di una pallina nera.

a) Calcolare la probabilità che servano 20 estrazioni.

b) Calcolare la probabilità che servano almeno 10 estrazioni.

Soluzione 1. Il numero X di estrazioni necessarie ha distribuzione geometrica di parametro $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$. Dunque

$$P(X = 20) = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{19},$$

$$P(X \geq 10) = \left(\frac{2}{5}\right)^{9}.$$

Esercizio 2. La prossima esondazione del fiume AAA avverrà fra X anni, dove X è una variabile Geometrica di parametro p.

(a) Si calcoli il valor medio $E(2^X)$.

(b) I danni di un tale evento sono valutati in 50 milioni di Euro. Una Compagnia di assicurazioni propone una polizza della durata di 10 anni: se l'esondazione avverrà nei prossimi 10 anni l'assicurazione pagherà 50 milioni di Euro all'amministrazione pubblica. Se C è il costo della polizza, il bilancio finale della Compagnia è (in unità milioni di Euro)

$$X = \begin{matrix} C & \text{se l'esondazione non avverrà nei prossimi 10 anni} \\ C-50 & \text{se l'esondazione avverrà nei prossimi 10 anni} \end{matrix}$$

Qual è il costo *equo* della polizza, cioè quello per cui $E(X) = 0$, assumendo $p = 0.01$?

Soluzione 2. (a)

$$E(2^X) = \sum_{n\geq 1} p(1-p)^{n-1}2^n = 2p\sum_{n\geq 1}[2(1-p)]^{n-1} = \frac{2p}{1-2(1-p)} = \begin{cases} \frac{2p}{2p-1} & \text{se } p > \frac{1}{2} \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(b) Si noti anzitutto che $P(X > 10) = (1-p)^{10} = 0.99^{10} \simeq 0.9$.

$$E(X) = CP(X > 10) + (C-50)[1-P(X > 10)] = 0 \iff C = 50(1-P(X > 10)) \simeq 5.$$

Esercizio 3. * Un gioco a premi ha il seguente funzionamento. Il montepremi iniziale è $C > 0$. Il concorrente lancia due volte una moneta. Se l'esito del primo e del secondo lancio sono uguali, il concorrente vince l'intero montepremi. In caso contrario il montepremi si dimezza. Il concorrente lancia la moneta una terza volta. Se l'esito del terzo lancio è uguale a quello del secondo, allora il concorrente vince $C/2$. In caso contrario il montepremi si dimezza ulteriormente, e così via. Sia X il montepremi vinto dal concorrente al termine del gioco.

(Si accetti il fatto che il gioco ha termine, cioè che non sia possibile avere una successione infinita di esiti in cui ogni esito è diverso dal precedente.)

(i) Assumendo che la moneta sia equilibrata, si determini la densità discreta di X.

(ii) Sempre nell'ipotesi che la moneta sia equilibrata, si determini il valor medio di X (si ricordi la serie geometrica).

Soluzione 3. (a) Si tratta di usare lo schema delle prove ripetute indipendenti. Si noti che l'evento $\left\{X = \frac{C}{2^{k-1}}\right\}$ è costituito dalle sequenze di esiti di lanci di una moneta in cui nei primi k esiti le teste e le croci si alternano, mentre l'esito $(k+1)$-esimo è uguale al k-esimo. Limitandosi ai primi $k+1$ lanci, ci sono due sequenze con questa proprietà, a seconda che l'esito del primo lancio sia testa o croce. Ognuna di queste sequenze ha probabilità $\frac{1}{2^{k+1}}$. Quindi

$$\mathrm{P}\left(X = \frac{C}{2^{k-1}}\right) = \frac{2}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}.$$

(b) Ne segue che, ricordando la somma della serie geometrica,

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x\in\mathbb{R}} x\,\mathrm{P}(X = x) = \sum_{k\geq 1} \frac{C}{2^{k-1}}\frac{1}{2^k} = \frac{C}{2}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{4^{k-1}} = \frac{C}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2C}{3}.$$

Esercizio 4. Giochiamo simultaneamente, e ripetutamente, a due giochi tra loro indipendenti. Sia p_1 la probabilità di vincere nel primo gioco, p_2 nel secondo. Sia X il numero di tentativi necessario a vincere *contemporaneamente* in *entrambi* i giochi, e Y il numero di tentativi necessario a vincere in *almeno uno* dei due giochi. Determinare $E(X)$ e $E(Y)$.

Soluzione 4. Consideriamo due giochi ausiliari.

Gioco A. Consiste nel giocare simultaneamente i due giochi; si ottiene un successo quando si vincono entrambi. La probabilità di successo è p_1p_2. X è il numero di tentativi fino al primo successo, quindi $X \sim Ge(p_1p_2)$, da cui

$$E(X) = \frac{1}{p_1p_2}.$$

Gioco B. Consiste nel giocare simultaneamente i due giochi; si ottiene un successo quando se ne vincono almeno uno dei due. La probabilità di successo è $1-(1-p_1)(1-p_2)$. Y è il numero di tentativi fino al primo successo, quindi $Y \sim Ge(1-(1-p_1)(1-p_2))$, da cui

$$E(X) = \frac{1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}.$$

Esercizio 5. Si sceglie "a caso" un campione di 5 oggetti da un lotto di 100 di cui 10 sono difettosi per effettuare un controllo di qualità. Sia X il numero di oggetti difettosi contenuti nel campione. Si determini la densità discreta di X.

Soluzione 5. La variabile X assume solo i valori $0,1\dots,5$. $X=k$ significa che nel lotto di 5 oggetti k sono difettosi. Possiamo calcolare $\mathrm{P}(X=k)$ riconoscendo che X ha una distribuzione ipergeometrica oppure calcolare questa probabilità con la formula "casi favorevoli su casi possibili" della probabilità uniforme. *Casi possibili*: ci sono $\binom{100}{5}$ modi di scegliere 5 oggetti tra 100. *Casi favorevoli*: devo scegliere 5 oggetti di cui k difettosi. Scelgo prima i k difettosi tra i 10 difettosi in $\binom{10}{k}$ modi, poi scelgo i rimanenti $5-k$ oggetti tra i rimanenti $100-10=90$ non difettosi in $\binom{90}{5-k}$ modi. In definitiva i casi favorevoli sono $\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}$ e quindi:

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}}{\binom{100}{5}}, \qquad k=0,1,\dots,5\,.$$

Facendo un po' di conti si ottiene: $\mathrm{P}(X=0)\simeq 0.583$, $\mathrm{P}(X=1)\simeq 0.340$, $\mathrm{P}(X=2)\simeq 0.070$, $\mathrm{P}(X=3)\simeq 0.007$, $\mathrm{P}(X=4)\simeq \mathrm{P}(X=5)\simeq 0$. Per essere sicuri di non aver sbagliato i conti su può fare la verifica $\sum_{k=0}^{5}\mathrm{P}(X=k)=1$.

Esercizio 6. Un'urna contiene $n\geq 1$ palline bianche e 2 palline rosse. Si eseguono estrazioni ripetute *senza reimmissione*. Introduciamo la variabile aleatoria

$$X \;=\; \text{numero di palline bianche estratte prima di estrarre una pallina rossa,}$$

la cui densità discreta verrà indicata con $\mathrm{p}_X(k)=\mathrm{P}(X=k)$. Si mostri che, per $k=0,1,\dots,n$,

$$\mathrm{p}_X(k)=\frac{2}{(n+2)(n+1)}(n-k+1).$$

Soluzione 6. Consideriamo gli eventi $A=$ "la $k+1$-ma pallina estratta è rossa", $B=$ "le prime k palline estratte sono tutte bianche". Si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=k)&=\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A|B)\,\mathrm{P}(B)\\&=\frac{2}{n-k+2}\,\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+2}{k}}\\&=\frac{2}{(n+2)(n+1)}(n-k+1),\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si sono eseguite le dovute semplificazioni.

Esercizio 7. Da un mazzo di 50 carte numerate da 1 a 50, si estraggono a caso 3 carte. Introduciamo le seguenti variabili aleatorie:

$$\begin{aligned}X &:= \text{numero più basso estratto}\\ Z &:= \text{numero più alto estratto}\\ Y &:= \text{terzo numero estratto}\,.\end{aligned}$$

Si determinino le densità di X,Y e Z.

Soluzione 7. Notare che $X \in \{1,2,\dots,48\}$. Se $n \in \{1,2,\dots,48\}$, l'evento $\{X = n\}$ significa "oltre a n, gli altri due numeri estratti sono maggiori di n". Quindi

$$P(X = n) = \frac{\binom{50-n}{2}}{\binom{50}{3}}.$$

Con argomenti analoghi: per $n \in \{3,4,\dots,50\}$

$$P(Z = n) = \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{50}{3}}$$

e per $n \in \{2,3,\dots,49\}$

$$P(Y = n) = \frac{(n-1)(50-n)}{\binom{50}{3}}.$$

Esercizio 8. Un gioco, che si può ripetere indefinitamente, ha una probabilità di successo $p = 0.01$. Si vince un Euro ad ogni successo, non si vince e non si perde nulla in caso di insuccesso.

Quante volte in media devo giocare per guadagnare un Euro? E 20 Euro?

Soluzione 8. Se X è il numero di volte che devo giocare per vincere un Euro, $X \sim Ge(p)$, per cui

$$E(X) = \frac{1}{p} = 100.$$

Se X è il numero di volte che devo giocare per vincere 20 Euro, Y è una binomiale negativa di parametri $r = 20$ e p, per cui

$$E(Y) = rp = 2000.$$

Esercizio 9. Tobia è proprietario di due negozi. Nel negozio A i clienti arrivano secondo un processo di Poisson con una media di 5 clienti per ora, mentre nel negozio B i clienti arrivano secondo un processo di Poisson con una media di 7 clienti per ora. I due negozi si trovano in località tra loro molto distanti, per cui gli arrivi dei clienti al negozio A si possono assumere indipendenti dagli arrivi dei clienti al negozio B. Entrambi i negozi aprono alle 9:00 e chiudono alle 19:00, con orario continuato.

(a) Qual è la probabilità che nel negozio A domani non arrivi alcun cliente fra le 9:00 e le 9:30?

(b) Qual è la probabilità che domani la somma dei clienti che giungeranno nei due negozi fra le 12:00 e le 13:00 sia uguale a 15?

(c) Tobia riceve dei dati relativi all'andamento della giornata di ieri da uno dei due negozi, ma non sa di quale dei due negozi si tratti (cioè i dati provengono con ugual probabilità da A o da B). In questi dati è riportato che il numero di clienti di ieri è stato 57. Qual è la probabilità che i dati provenissero dal negozio A?

Soluzione 9. (a) $e^{-5/2}$.

(b) Tale somma di clienti ha distribuzione di Poisson di parametro $5+7=12$, per cui la probabilità richiesta è
$$e^{-12}\frac{12^{15}}{15!}.$$

(c) Con abuso di notazione, indichiamo con A (risp. B) l'evento "i dati provengono dal negozio A" (risp. B). Se X è il numero di clienti riportato, $X \sim Po(50)$ se i dati provengono da A, mentre $X \sim Po(70)$ se i dati provengono da B. Dunque
$$P(X=57|A) = e^{-50}\frac{50^{57}}{57!}$$
$$P(X=57|B) = e^{-70}\frac{70^{57}}{57!}$$
da cui, per la Formula di Bayes,
$$P(A|X=57) = \frac{\frac{1}{2}e^{-50}\frac{50^{57}}{57!}}{\frac{1}{2}e^{-50}\frac{50^{57}}{57!}+\frac{1}{2}e^{-70}\frac{70^{57}}{57!}}.$$

Esercizio 10. In uno studio medico i pazienti arrivano secondo un processo di Poisson, con una media di 6 pazienti all'ora, a partire dall'orario di apertura.

(a) Qual è il tempo medio fra l'apertura dello studio e l'arrivo del primo paziente?

(b) Calcolare la probabilità che nella prima ora non arrivi alcun paziente.

(c) Sia N la variabile aleatoria così definita: $N=n$ se l'n-esimo paziente è il primo che arriva oltre mezz'ora dopo il paziente precedente (o oltre mezz'ora dopo l'orario di apertura, se $n=1$). Calcolare la densità di N e $E(N)$, assumendo che lo studio apra domattina e poi resti sempre aperto con orario continuato.

Soluzione 10. (a) Questa domanda sarà accessibile fra un paio di lezioni, chiedo scusa...

(b) Se X è il numero di pazienti che arrivano nella prima ora, $X \sim Po(6)$. Dunque
$$P(X=0)=e^{-6}.$$

(c) Questa domanda sarà accessibile fra un paio di lezioni, chiedo scusa...