ESERCIZI - FASCICOLO 6

Esercizio 1. Sia X una v.a. uniforme sull'intervallo $(0,2)$ e sia $Y := X^2$. Calcolare la funzione di ripartizione F_Y e la sua densità f_Y.

Esercizio 2. Sia X una v.a. continua con densità assegnata f_X,

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0,1) \\ c\log(x) & x \in (0,1) \end{cases}$$

e si definisca $Y = -\log(X)$
(a) Quanto vale la costante c?
(b) Calcolare la funzione di ripartizione F_X.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y.
(d) Calcolare la densità f_Y.

Esercizio 3. Sia X una v.a. aleatoria continua con densità f_X data da

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\alpha - x}{2} & 0 \le x < \alpha \\ 0 & \alpha \le x \end{cases}$$

con $\alpha > 0$.
(a) Determinare α.
(b) Determinare la funzione di ripartizione F_X.
(c) Calcolare $\mathrm{E}[X]$.
(d)(Difficile) Sia Y una v.a. uniforme sull'intervallo $(0,1)$, trovare una funzione g da $(0,1)$ in $\mathbb{R}$ non decrescente tale che posto $Z = g(Y)$ si abbia $Z \sim X$ (cioè Z abbia la stessa densità di X).

Esercizio 4. L'altezza media, in centimetri, di un bambino di 7 mesi è una variabile aleatoria normale di parametri $\mu = 71$ e $\sigma^2 = 6.25$. Qual è la percentuale di bambini di 7 mesi che superano i 74 cemtimetri di altezza?

Esercizio 5. Io prendo mediamente due raffreddori l'anno: il tempo tra la fine di un raffreddore e l'inizio del successivo ha distribuzione normale, con media 160 giorni e deviazione standard di 40 giorni.

i. Qual è la probabilità che rimanga 200 giorni o più senza un raffreddore?
ii. Qual è la probabilità che mi prenda un raffredore entro 80 giorni dalla guarigione dal precedente?

Esercizio 6. Il quoziente di intelligenza (IQ) nella popolazione ha distribuzione normale con media 100 e deviazione standard 15. Quale valore minimo di IQ bisogna avere per appartenere al 5% della popolazione con maggiore IQ?

Esercizio 7. L'altezza della popolazione femminile adulta degli Stati Uniti ha distribuzione normale di media 165 cm e deviazione standard 7.5 cm. È stato riscontrato che donne particolarmente alte vanno incontro a maggiori problemi dovuti all'osteoporosi, e quindi si propone l'adozione di uno *screening* preventivo.

a) Supponiamo che si decida di eseguire lo screening su tutte le donne di altezza superiore a 175 cm. A quale percentuale di popolazione femminile corrispondono?

b) Supponiamo che invece si decida di eseguire lo screening sul 5% più alto della popolazione femminile. Qual è l'altezza minima delle donne sottoposte a screening?

Esercizio 8. Data una variabile aleatoria X con distribuzione uniforme in $(-\pi/2, \pi/2)$, si mostri che $Y := \cos(X)$ è una variabile continua e se ne determini la densità.

Esercizio 9. Sia X un punto scelto uniformemente nell'intervallo $[0,2]$. Qual è la probabilità che il triangolo equilatero di lato X abbia area maggiore di 1?

Esercizio 10. Sia $X \sim \mathrm{U}(0,1)$ e sia $Y := 4X(1-X)$.

(i) Si determini la funzione di distribuzione di Y, si deduca che la variabile Y è continua e se ne calcoli la densità.

Esercizio 11. In un dato tratto di strada la velocità delle auto ha distribuzione normale con media 90 km/h e deviazione standard 10 km/h. Viene piazzato un rilevatore automatico di velocità, che viene "tarato" ad una velocità x: ciò significa che sarà inviata una multa ai proprietari delle auto la cui velocità è maggiore di x.

(a) Se $x = 105$, qual è la percentuale di auto a cui verrà data una multa?

(b) Quale deve essere il valore di x affinché la multa venga data al 2% delle auto?

Esercizio 12. Il livello di colesterolo nella popolazione maschile fra i 18 e i 24 anni è distribuito normalmente con media 178.1 Mg/dL, e deviazione standard 40.7.

(a) Qual è la percentuale di popolazione con livello di colesterolo superiore a 200?

(b) Si selezionano a caso 9 individui della popolazione, e si denota con X la media aritmetica dei loro livelli di colesterolo. Qual è la probabiltà che X sia compreso fra 170 e 180?

Esercizio 13. In un gioco d'azzardo si vincono due Euro in caso di successo, e si perde un Euro in caso di insuccesso. La probabilità di successo è $p = 0.4$.

(a) Sia X il numero di successi in n ripetizioni del gioco. Qual è la densità di X?

(b) Sia Y il numero (relativo) di Euro vinti in n ripetizioni del gioco. Dopo aver determinato una relazione che lega X e Y, si determini media e varianza di Y.

(c) Si calcoli approssimativamente la probabilità di vincere almeno 50 Euro in 220 ripetizioni del gioco.

Esercizio 14. Una compagnia aerea rileva che il tempo di percorrenza X di una certa tratta ha distribuzione Normale, con una media di 93 minuti e una deviazione standard di 8 minuti.

(a) Qual è la probabilità che un dato volo impieghi oltre 105 minuti per percorrere la tratta?

(b) La compagnia vuole pubblicare un tempo “ufficiale” di percorrenza in modo tale che, su un gran numero di voli, il 99% impieghi meno di questo tempo “ufficiale”. Quale deve essere il valore del tempo “ufficiale” di percorrenza?

(c) Qual è la probabilità che su 10 voli almeno uno abbia un tempo di percorrenza maggiore di quello “ufficiale”? (Si assuma che voli diversi abbiano tempi di percorrenza indipendenti)

Esercizio 15. Nella specie chiamata “trifoglio bianco ” il 99.99 % degli esemplari ha effettivamente tre foglie, gli altri ne hanno 4 (in realtà alcuni ne hanno più di 4, ma qui lo ignoriamo).

(a) Raccolgo in modo casuale 10000 esemplari. Calcolare approssimativamente la probabilità che almeno uno sia un quadrifoglio.

(b) In un campo sono presenti 200000 esemplari. Qual è la probabilità che il numero di quadrifogli sia almeno 22?

(*Sugg:* per ognuno dei due casi individuare l’opportuno metodo di approssimazione)

Esercizio 16. Nella battitura di un testo, ogni carattere viene sbagliato con probabilità 0.005, indipendentemente dagli altri. Un articolo contiene 2500 caratteri. Usando l’approssimazione normale, calcolare la probabilità che nell’articolo ci siano oltre 15 errori.

Esercizio 17. Un test a risposta multipla consiste di 100 domande, che prevedono 4 possibili risposte delle quali solo una è corretta (come nella prima parte di questo esame) . Uno studente risponde a caso a tutte le domande del test. Si calcoli

(a) la media e la varianza del numero di risposte corrette che egli fornisce;

(b) la probabilità che il numero di risposte corrette sia compreso tra 20 e 30 (impiegando l’approssimazione normale).

Esercizio 18. In una elezione votano un milione di persone, che devono scegliere tra i due candidati A e B. Il voto di un certo numero n di elettori è sotto il controllo di una organizzazione malavitosa, che garantisce che essi votino per il candidato A. Tutti gli altri elettori votano “a caso”, scegliendo con ugual probabilità i due candidati, ognuno indipendentemente dagli altri.

(i) Supponiamo che l’organizzazione malavitosa controlli $n = 2\,000$ voti. Qual è la probabilità (approssimata) che il candidato A vinca le elezioni?

(ii) Qual è il numero minimo n di individui che l’organizzazione malavitosa deve controllare, per garantire che la probabilità di vittoria di A sia almeno del 99%?

Esercizio 19. Una compagnia aerea offre ai sui passeggeri la scelta fra due tipi di snack: salatini o biscotti. Sulla base della passata esperienza, la compagnia ritiene che le due scelte siano equiprobabili. Supponiamo che in un dato volo ci siano 150 passeggeri, che scelgono ognuno indipendentemente dagli altri. Si calcoli, in modo approssimato,

(a) la probabilità che almeno 60 passeggeri scelgano i salatini;

(b) se a bordo ci sono 90 unità di ognuno dei due tipi di snack, la probabilità che qualche passeggero non possa avere lo snack che desidera.

Esercizio 20. Una banca presta per un anno ad un'azienda un capitale C. Dopo un anno l'azienda deve restituire la somma $(1+r)C$, dove r è il tasso di interesse. C'è però una piccola probabilità, che denoteremo con p, che l'azienda fallisca, e non sia pertanto in grado di restituire alcunché. Perciò, se X è una variabile aleatoria di Bernoulli di parametro $1-p$, la somma incassata dalla banca è $Y=(1+r)CX$.

(a) Supponiamo il valore di p sia noto. Quale deve essere il valore di r affinché $E(Y)=C$, cioè il tasso di interesse serva esattamente a compensare in media il fattore di rischio?

(b) Supponiamo ora $p=0.05$, $C=1$, e sia r il valore calcolato al punto precedente. La banca eroga lo stesso prestito a 100 diverse aziende, i cui eventuali fallimenti avvengono indipendentemente gli uni dagli altri. Calcolare approssimativamente la probabilità che la somma incassata dalla banca dopo un anno sia minore o uguale a 95.

Esercizio 21. Un giocatore di pallacanestro ha una percentuale di successo nei tiri da tre punti del 20%. Calcolare:

a. la probabilità che in 100 tiri faccia non più di 54 punti;

b. il numero minimo di tiri che deve effettuare per realizzare almeno 57 punti con probabilità maggiore o uguale a 0.95.

Esercizio 22. Il gruppo promotore di un referendum ritiene che il 60% della popolazione sia disposta a firmare per la relativa raccolta di firme. Si assuma che le persone a cui viene richiesto di firmare siano scelte a caso. Dovendo raccogliere 30.000 firme, quante persone è necessario interpellare affinchè la soglia delle 30.000 firme sia raggiunta con probabilità di almeno $0,95$?

Esercizio 23. Per una certa specie africana di uccelli, i neonati hanno – indipendentemente l'uno dal l'altro – una probabilità di sopravvivere al primo mese pari a $1/7$. Quelli che sopravvivono al primo mese hanno una probabilità pari a $1/3$ di superare l'anno.

(i) Qual è la probabilità che un neonato sopravviva al primo anno?

(ii) Se un neonato muore entro il primo anno, qual è la probabilità che sia sopravvissuto al primo mese?

(iii) Si determini approssimativamente il numero minimo n di neonati da monitorare affinché la probabilità che ne sopravvivano almeno 30 dopo un mese sia almeno 0.95.