

Esercizio Sia $X \sim U(-1, 1)$. Definire $Y = X^2$, mostrare che Y è una v.a. continua e determinarne la densità.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ 1 & \text{se } y \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Sia } y \in [0, 1]. F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) =$$

$$= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$$\stackrel{!}{=} \sqrt{y}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \sqrt{y} & 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

F_Y è continua, e ammette derivata continua tranne in 0 e 1
Quindi Y è continua con densità

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (0,1) \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} & y \in (0,1) \end{cases}$$

Esercizio Sia X una v.a. continua con densità

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\alpha - x}{2} & 0 \leq x < \alpha \\ 0 & x \geq \alpha \end{cases} \quad \text{con } \alpha > 0$$

(a) Trovare α

(b) Trovare F_X

(c) Calcolare $E(X)$

(d) Sia $Y \sim U(0,1)$. Trovare una funzione crescente g tale che $g(Y)$ abbia la stessa densità di X .

$$1/2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(n) dn = 1 \quad \forall \alpha$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(n) dn = \int_0^{\alpha} \frac{\alpha - x}{2} dx = 1$$

$$\int_0^{\alpha} \frac{\alpha - x}{2} dx = \frac{\alpha}{2} \int_0^{\alpha} dx - \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} x dx = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\alpha} = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

$$(b) F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

for $0 \leq x \leq 2$: $F_X(x) = \int_0^x \frac{2-y}{2} dy = x - \frac{x^2}{4}$

$$(c) E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^2 x \frac{2-x}{2} dx = \int_0^2 x dx - \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx$$

$$= \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^2 - \frac{1}{2} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \frac{8}{3} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

(d) Sia $Y \sim U(0,1)$ g crescente.

Voglio che $P(g(Y) \leq x) = P(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x - \frac{x^2}{4} & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

$$P(g(Y) \leq x) = P(Y \leq g^{-1}(x)) = g^{-1}(x) \quad \begin{matrix} x & 0 \leq x \leq 2 \\ g: [0,1] \rightarrow [0,2] \end{matrix}$$

Deve quindi essere $g^{-1}(x) = x - \frac{x^2}{4}$

Quindi, per trovare $g(y)$ risolviamo

$$y = f^{-1}(x) = x - \frac{x^2}{4} \quad x^2 - 4x + 4y = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - 4y}$$

$$\Rightarrow g(y) = 2 - \sqrt{4 - 4y}$$

Approssimazione normale per le Binomiali

Teorema Sia $S_n \sim B(n, p)$ e $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

dove Φ è la funzione di ripartizione di una $N(0, 1)$

Example Ripetiamo 100 volte un gioco in cui la probab. di vincere è $\frac{1}{2}$. Qual è la probabilità di perdere almeno 60 volte?

S_{100} = n° di successi in 100 prove $\sim B(100, \frac{1}{2})$

$$P(S_{100} < 40) = \sum_{k=0}^{39} \binom{100}{k} \frac{1}{2^{100}}$$

$$\begin{aligned} P(S_{100} < 40) &= P\left(\frac{S_{100} - 50}{5} < \frac{40 - 50}{5}\right) \simeq \Phi\left(\frac{40 - 50}{5}\right) = \Phi(-2) \\ &= 1 - \Phi(2) = \\ &= 1 - 0.977 = 0.023 \end{aligned}$$

In generale, abbiamo fatto l'operazione seguente:

$$S_n \sim B(n, p)$$

$$P(S_n \leq m) = P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

alternativamente

$$P(S_n \leq m) = P(S_n < m+1) = P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{m+1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{m+1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

In generale risulta che la migliore approssimazione si ottiene con una "via di mezzo",

$$P(S_n \leq m) \approx \Phi\left(\frac{m + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Tale correzione si dice "correzione di continuità"

L'approssimazione ottenuta è "buona" se

$$\begin{cases} np > 5 \\ n(1-p) > 5 \end{cases} \quad \text{e}$$

Terminiamo all'esempio di $S_{100} \sim B(100, \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} P(S_{100} < 40) &= P(S_{100} \leq 39) = P(S_{100} \leq 39.5) \\ &= P\left(\frac{S_{100} - 50}{5} \leq \frac{39.5 - 50}{5}\right) \simeq \Phi(-2.1) \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} P(S_{100} \geq 55) &= P(S_{100} > 54) = P(S_{100} \geq 54.5) = P\left(\frac{S_{100} - 50}{5} \geq \frac{54.5 - 50}{5}\right) \\ &= P(Z \geq 0.9) \quad (\text{dove } Z \sim N(0,1)) = 1 - \Phi(0.9) \end{aligned}$$