

Esercizio In un gioco la probab. di vincere è $\frac{1}{2}$.

Quante ripetizioni dobbiamo eseguire affinché la prob. di ottenere 100 successi sia almeno 0.95?

$$X \text{ n° di successi in } n \text{ prove} \sim B(n, \frac{1}{2})$$

Trovare n affinché $P(X \geq 100) \geq 0.95$

$$P(X \geq 100) = P(X \geq 99.5) = P\left(\frac{X - \frac{n}{2}}{\sqrt{n/4}} \geq \frac{99.5 - \frac{n}{2}}{\sqrt{n/4}}\right)$$

$$Z \sim N(0,1)$$

$$\cong P\left(Z \geq \frac{99.5 - \frac{n}{2}}{\sqrt{n/4}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{99.5 - \frac{n}{2}}{\sqrt{n/4}}\right) = \Phi\left(\frac{\frac{n}{2} - 99.5}{\sqrt{n/4}}\right)$$

$$\text{Vogliamo dunque } \Phi\left(\frac{\frac{n}{2} - 99.5}{\sqrt{n/4}}\right) \geq 0.95$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{n}{2} - 99.5}{\sqrt{n/4}} \geq \Phi^{-1}(0.95) = 1.64$$

Si ottiene $\frac{n}{2} - 99.5 - 1.64 \frac{\sqrt{n}}{2} \geq 0$

$$n - 1.64 \sqrt{n} - 199 \geq 0 \quad \text{Poniamo } x = \sqrt{n}$$

$$x^2 - 1.64x - 199 \geq 0 \quad x_{1,2} = \frac{1.64 \pm \sqrt{(1.64)^2 + 796}}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \geq \frac{1.64 + \sqrt{(1.64)^2 + 796}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \left(\quad \right)^2$$

Per tale n , $n \cdot \frac{1}{2} > 5$ e quindi è legittimo usare l'approx normale.

Variabili aleatorie esponenziali

Supponiamo che ad un servizio i clienti arrivino secondo un processo di Poisson di intensità $\lambda > 0$.

Sia X il tempo di attesa del primo cliente.

Sia $t > 0$. $P(X > t) = P(\text{n° di clienti in } [0, t] = 0)$

$= P(P_0(\lambda t) = 0) = e^{-\lambda t}$. Cioè

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow X$ è continua con densità $f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$

Definizione una v.a. X si dice esponenziale di parametro $\lambda > 0$ se è continua con densità

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

Proposizione Siano $s, t > 0$, $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

$$P(X > t+s | X > t) = P(X > s)$$

$$\underline{\text{Dim}} \quad P(X > t+s | X > t) = \frac{P(\{X > t+s\} \cap \{X > t\})}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s)$$

Le v.a. esponenziali sono un caso particolare di :

Variabili aleatorie Gamma

Sempre in un processo di Poisson di intensità $\lambda > 0$
sia X il tempo che devo aspettare per vedere
il secondo cliente.

$$P(X > t) = P(\text{n° di clienti in } [0, t] = 0 \text{ oppure } 1) \\ = e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} \Rightarrow F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$$f_X(t) = F'_X(t) \stackrel{(t > 0)}{=} \cancel{\lambda e^{-\lambda t}} - \cancel{\lambda e^{-\lambda t}} + \lambda^2 t e^{-\lambda t} \Rightarrow f_X(t) = \begin{cases} \lambda^2 t e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

E se X è il tempo di attesa dell' n -mo cliente?

$$P(X > t) = P(\text{n° clienti in } [0, t] \leq n-1) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$f_X(t) \stackrel{(t>0)}{=} - \frac{d}{dt} (P(X > t)) = \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda k \frac{(\lambda t)^{k-1}}{k!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}$$

$$\text{e } f_X(t) = 0 \quad \text{se } t \leq 0$$

Definizione Siano $\lambda > 0$ $\alpha > 0$. Una v.a. X si dice

v.a. gamma di parametri α e λ , e scriviamo

$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ se è continua con densità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad \Gamma(1) = 1$$

funzione Γ di Eulero

$$\Rightarrow n \text{ intero } \geq 1$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda) \quad E(X) = ?$$

$$\text{Vediamo: } \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}$$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{\lambda}$$

NOTA se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, cioè $X \sim \Gamma(1, \lambda) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$$\text{Analogamente: } E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} \Rightarrow \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$