

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E[XY] - E(X)E(Y)$$

$$\text{Coefficiente di correlazione: } \rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}}$$

Proposizione $|\rho(X, Y)| \leq 1$. Inoltre $\rho(X, Y) = 1$ (risp. -1)

se e solo se esiste $a > 0$ (risp. < 0) e $b \in \mathbb{R}$ tali che
 $Y = aX + b$

Più in generale il coefficiente di correlazione dice quanto Y possa essere ben approssimato da una trasformazione lineare della X .

Esercizio In uno schema di prove ripetute e indipendenti con prob. di successo p , sia S l'istante di primo successo e T l'istante di secondo successo.

- Determinare la densità congiunta di S e T
- Posto $U = T - S$, mostrare che S e U sono v.a. indipendenti e con la stessa densità.
- Calcolare $p(S, T)$

$$a) P_{S,T}(n, m) = P(S = n, T = m) \quad (m > n)$$

$$\begin{aligned}
 &= P(\text{i primi } n-1 \text{ tentativi sono insuccessi, l'} n\text{-mo è un successo,} \\
 &\quad \text{i tentativi fra l'} (n+1)\text{-esimo e l'} m\text{-1-mo sono insuccessi,} \\
 &\quad \text{l'} m\text{-mo è un successo}) = (1-p)^{n-1} p (1-p)^{m-n-1} p \\
 &= p^2 (1-p)^{m-2}
 \end{aligned}$$

$$P_{S,T}(n,m) = \begin{cases} p^2(1-p)^{m-2} & \text{se } 1 \leq n < m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$b) U = T - S$$

$$P_{S,U}(n,k) = P(S=n, U=k) = P(S=n, T-S=k)$$

$$= P(S=n, T=n+k) = P_{S,T}(n, n+k) \quad (n, k \geq 1)$$

$$= p^2(1-p)^{n+k-2} = \underbrace{p(1-p)^{n-1}}_{P_S(n)} p(1-p)^{k-1}$$

$$\Rightarrow P_U(k) = \sum_n P_{S,U}(n,k) = p(1-p)^{k-1} \sum_{n \geq 1} p(1-p)^{n-1} = p(1-p)^{k-1}$$

$$\Rightarrow P_{S,U}(n,k) = P_S(n) P_U(k) \Rightarrow S, U \text{ sono indipendenti}$$

$$(S, U \sim g_k(p))$$

$$(c) \rho(S, T) = ? \quad \text{Cov}(S, T) = \text{Cov}(S, S+U) =$$

$$\text{Cov}(S, S) + \underbrace{\text{Cov}(S, U)}_{=0 \text{ puisque } S \text{ et } U \text{ sont indep.}} = \text{Var}(S) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\text{Var}(T) = \text{Var}(S+U) = \text{Var}(S) + \text{Var}(U) + \cancel{\text{Cov}(S, U)} = 2 \text{Var}(S)$$

$$\rho(S, T) = \frac{\text{Var}(S)}{\sqrt{\text{Var}(S) \cdot 2 \text{Var}(S)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Esercizio In un'urna ci sono z palline rosse e n palline nere. Esegue 2 estrazioni senza rimmistione.

Per $i=1,2$ definiamo

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la pallina estratta all' } i\text{-ma estrazione} \\ & \text{è rossa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare $p(X_1, X_2)$ $X_1, X_2 \sim \text{Be}(\frac{z}{z+n})$

$$P_{X_1, X_2}(1,1) = P(\text{rossa alla 1}^\circ, \text{rossa alla 2}^\circ) = P(\text{rossa alla 2}^\circ | \text{rossa alla 1}^\circ) \cdot P(\text{rossa alla 1}^\circ)$$

$$\left. \begin{aligned} &= \frac{z}{z+n} \cdot \frac{z-1}{z+n-1} \\ P_{X_1, X_2}(0,1) &= \frac{n}{z+n} \cdot \frac{z}{z+n-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(X_2=1) = P_{X_1, X_2}(1,1) + P_{X_1, X_2}(0,1) = \frac{z}{z+n}$$

$$P_{X_1, X_2}(1,0) = \frac{z}{z+n} \cdot \frac{n}{z+n-1}$$

$$P_{X_1, X_2}(0,0) = \frac{n}{z+n} \cdot \frac{n-1}{z+n-1}$$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2)$$

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{r}{r+n}$$

$$E(X_1 X_2) = \sum_{x_1, x_2} x_1 x_2 P_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = P_{X_1, X_2}(1, 1) = \frac{r}{r+n} \frac{r-1}{r+n-1}$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{r}{r+n} \frac{r-1}{r+n-1} - \left(\frac{r}{r+n} \right)^2 = \frac{-r n}{(r+n)^2 (r+n-1)}$$

$$\text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_2) = \frac{r}{r+n} \left(1 - \frac{r}{r+n} \right) = \frac{r n}{(r+n)^2}$$

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\frac{-r n}{(r+n)^2 (r+n-1)}}{\frac{r n}{(r+n)^2}} = -\frac{1}{r+n-1}$$

Sia $X \sim B(n, p)$. X può essere vista come il n° di successi in n prove ripetute e indipendenti

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'i-esima è un successo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad X_i \sim Be(p)$$

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ Le v.s. $X_1, \dots, X_n$ sono indipendenti

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n) = np(1-p)$$

Sia ora X e Y due v.v. discrete, di cui è nota la densità congiunta.

Ponendo $Z = X + Y$ qual è la densità di Z ?

$$\{Z = z\} = \bigcup_{\substack{(x,y): \\ x+y=z}} \{X=x, Y=y\}$$