

AVVISO Domani (venerdì) non ci sarà lezione

X, Y v.a. discrete, $p_{X,Y}$ la densità congiunta
Ponendo $Z = X + Y$

$$\{Z = z\} = \bigcup_{\substack{(x,y): \\ x+y=z}} \{X=x, Y=y\} = \bigcup_x \underbrace{\{X=x, Y=z-x\}}_{\text{unione di eventi disgiunti}}$$

$$\Rightarrow P(Z=z) = \sum_x P(X=x, Y=z-x) \quad \text{cioè} \quad \boxed{P_Z(z) = \sum_x p_{X,Y}(x, z-x)} \\ = \sum_y p_{X,Y}(z-y, y)$$

Se in particolare X e Y sono indipendenti

$$\left. \begin{aligned} P_Z(z) &= \sum_x P_X(x) P_Y(z-x) \\ &= \sum_y P_X(z-y) P_Y(y) \end{aligned} \right\} = \underbrace{P_X * P_Y}(z)$$

convoluzione di P_X e P_Y

Esempio $X \sim B(n, p)$ $Y \sim B(m, p)$ indipendenti.

$$\begin{aligned} P_{X+Y}(k) &= \sum_h P_X(h) P_Y(k-h) = \sum_{h=0}^m P_X(h) P_Y(k-h) = \\ &= \sum_{h=0}^m \binom{n}{h} p^h (1-p)^{n-h} \underbrace{\binom{m}{k-h} p^{k-h} (1-p)^{m-(k-h)}}_{=0 \text{ se non è vero che } 0 \leq k-h \leq m} \\ &= p^k (1-p)^{n+m-k} \underbrace{\sum_{h=0}^m \binom{n}{h} \binom{m}{k-h}}_{\binom{n+m}{k}} = \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k} \end{aligned}$$

Ciò è $X+Y \sim B(n+m, p)$

Esempio $X \sim Po(\lambda)$ $Y \sim Po(\mu)$ indipendenti

$$P_{X+Y}(n) = \sum_k P_X(k) P_Y(n-k) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \left(\text{osservando che } \frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \binom{n}{k} \right)$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k}}_{(\lambda+\mu)^n} \quad \text{Binomio di Newton}$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} \Rightarrow X+Y \sim Po(\lambda+\mu)$$

Cenni di integrazione in più variabili

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

Cosa vuol dire: $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$

Se $f(x, y) \geq 0 \forall x, y$, tale integrale è il volume della regione di spazio compresa fra il piano xy e la superficie di equazione $z = f(x, y)$

Operativamente, per calcolare $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy$ si

integra "una variabile alla volta":

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx \right] dy\end{aligned}$$

Se $B \subseteq \mathbb{R}^2$, definiamo

$$\iint_B f(x,y) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) 1_B(x,y) dx dy$$

dove $1_B(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in B \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ funzione indicatrice di B

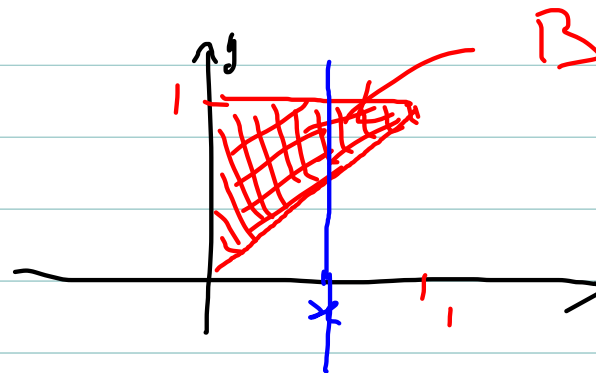
Example $B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$

$$\iint_B xy \, dx \, dy = \iint_{\mathbb{R}^2} xy \, 1_B(x, y) \, dx \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} xy \, 1_B(x, y) \, dy \right] dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xy \, 1_B(x, y) \, dy = 1_{[0,1]}(x) x \int_x^1 y \, dy$$

$$= 1_{[0,1]}(x) x \left[\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right]$$



$$\iint_B xy \, dx \, dy = \int_0^1 x \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8}$$